GÜZ DÖNEMİ

SAYI 5 | 2026

YILDIZ FİZİK DERGİSİ

Modern Bilimin İki ucu: Kuantum ve kozmoloji

Çeneni kapat ve hesapla
Kuantum noktaları
madelung dönüşümü
olbers paradoksu
Galaksi Haloları
Noether teoremi



Yazarlar

ALMİRA AZRA KARACA

HAKAN BAHADIR YOLERİ

ARİF OZAN ÖKSÜZOĞLU

IŞIL BURGAÇ

HİLAL EVİN

SERHAT METE GÖKTAŞ

TASARIM

SERHAT METE GÖKTAŞ

NİLAY DUMAN

HİLAL EVİN

Zehra Ceylin Yenigün

İPEK ÖZPARLA

EDİTÖRLER

SERHAT METE GÖKTAŞ

NİSAN KAYA

RABİA KILIÇ

- İÇİNDEKİLER -

SHUT UP AND CALCULATE 1
ALMİRA AZRA KARACA

Boyutun Rengi: Kuantum Noktalarının İşleyişi 6
HAKAN BAHADIR YOLERİ

MADELUNG DÖNÜŞÜMÜ 10
ARİF OZAN ÖKSÜZOĞLU

MİLYARLARCA YILDIZA RAĞMEN GÖKYÜZÜ NEDEN KARANLIKTIR? 15
IŞIL BURGAÇ

GÖRÜNMEYEN BİR GALAKSİYİ NASIL TARTARIZ? 18
HİLAL EVİN

NOETHER TEOREMİ VE KORUNUMLU BÜYÜKLÜKLER 24
SERHAT METE GÖKTAŞ

Değerli Yıldız Fizik Dergisi okurları,

Beşinci sayımızda lisans düzeyindeki öğrenci dergilerinin yalnızca popüler bilimle sınırlı kalmak zorunda olmadığını göstermek istedik. “Modern Bilimin İki Ucu: Kuantum ve Kozmoloji” ekseninde kurguladığımız bu sayıda; kuantum fiziğinin felsefi sınırlarından kozmolojik ölçeklere uzanırken özellikle Madelung Dönüşümü ve Noether Teoremi yazılarıyla popüler anlatılarda sıkça arka plana atılan matematiği doğrudan merkeze aldık.

Bu sayı aynı zamanda dergimiz için yapısal bir dönüm noktası: “Görünmeyen Bir Galaksiyi Nasıl Tartarız?” başlıklı çalışmayla Ankara Üniversitesi Astronomi ve Uzay Bilimleri Bölümünden Yıldız Fizik Dergisi tarihindeki ilk misafir yazımızı ağırladık.

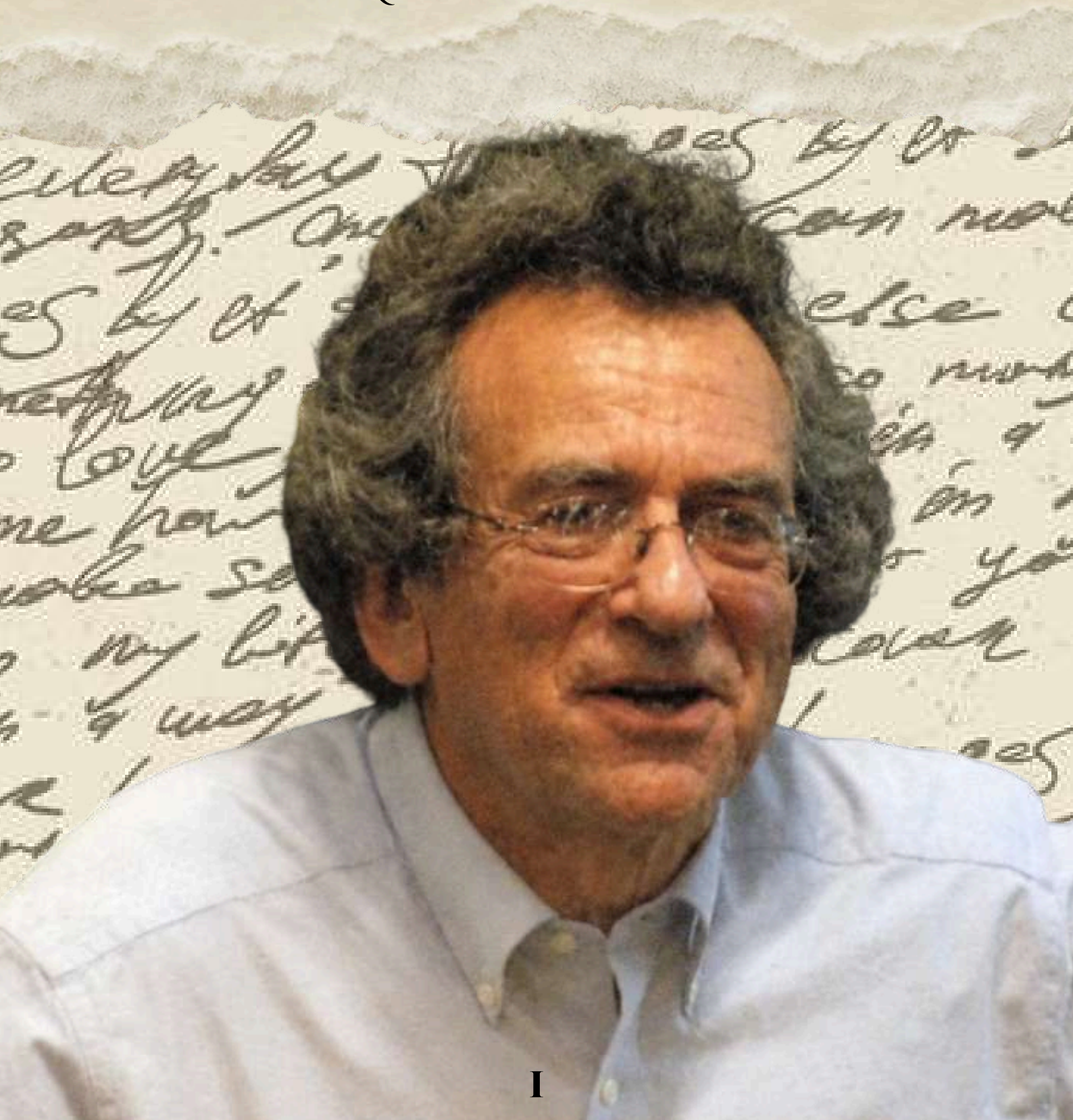
Ayrıca derginin akademik bütünlüğünü korumak için her yazı konu hakkında yetkin hakemler tarafından doğrulandı.

Keyifli okumalar dilerim.

- S. Mete GÖKTAŞ
Baş Editör

SHUT UP AND CALCULATE

ALMİRA AZRA KARACA
EDİTÖR: YFD YAYIN KURULU



Fiziğin altın çağında kurallar basitti: Soruyu sorma, denklemi çöz; anlamı arama, hesapla. Kuantum mekaniğinin o bunaltıcı belirsizlikleri karşısında David Mermin'in popülerleştirdiği meşhur kalıp, nesiller boyu fizikçilere bir sığınak oldu: "Çeneni kapat ve hesapla!" (Shut up and calculate!). Felsefe yapma zamanı değildi, evrenin dili matematikti ve bize düşen sadece kalemi oynatmaktı. Peki ya o kalemi de elimizden alıp yapay zekâya verirsek? Bugün felsefeden kaçan fizik, kendini çok daha karmaşık ve radikal bir aynanın karşısında buluyor: Ekranı kapatmak ve prompt girmek.



Birçok kişi için bu durum varoluşsal bir tehdit gibi görünebilir: Hesaplamayı makine yapıyorsa, fizikçinin ne anlamı kalır? Oysa madalyonun diğer yüzü tam tersini söylüyor. Yapay zekâ, analitik hamallığı ve o yorucu hesaplama döngülerini otomatikleştirdikçe insan zihnine çok daha kıymetli bir alan açılıyor: Felsefe mutfağı. Eskiden günlerce süren sayısal simülasyonlar ve türevlerle boğuşmaktan teorinin temel varsayımlarını ve epistemolojik zeminini sorgulamaya vakit bulamazdık. Şimdi ise yapay zekâ "Nasıl?" sorusunu bizim yerimize saniyeler içinde çözerken, geriye tek ve en asil görev kalıyor: "Neden?" sorusunu sormak ve kavramsal temelleri yeniden inşa etmek. Hesap yükünden kurtuldukça bilimin ender felsefi mutfağına girmek için belki de ilk kez bu kadar çok vaktimiz var.



Ancak burada naif bir yanılgıya düşmemek gerekiyor. Yapay zekâyı sadece alt düzey bir "hesap makinesi" ya da faz uzayını çözen dilsiz bir alet olarak görmek, onun dönüştürücü gücünü ıskalamaktır. Makineler artık sadece türev almıyor; insan sezgisinin dahi henüz erişemediği gizli korelasyonları, verideki derin örüntüleri yakalıyor. Dolayısıyla yapay zekâ, pasif bir araç olmaktan çıkıp bizzat epistemolojik bir aktöre dönüşüyor. Fiziğin tarihsel patikasına baktığımızda, bilimin felsefeyle ne kadar iç içe doğduğunu net bir şekilde görürüz. Antik Yunan'dan doğa felsefesinin şafağına kadar evreni anlamak, onun derinindeki nedenleri sorgulamak demektir. Ancak Newton mekaniğinin matematiğe dayalı başarısı ve ardından 20. yüzyılın başında kuantum mekaniğinin yarattığı ontolojik kriz, fiziği pragmatik bir kaçışa yöneltti: Kavramsal karmaşada boğulmamak adına felsefi sorgulama bir kenara bırakıldı. Yüzyıla yakın bir süre boyunca fizik; analitik hesaplamaların, ağır diferansiyel denklemlerin ve yorucu veri analizlerinin karmaşalarıyla özdeşleşti.

Ama bugün yapay zekâ devrimiyle birlikte tarihin en büyük epistemolojik döngülerinden birine şahitlik ediyoruz. Makineler karmaşık çoklu-parçacık simülasyonlarını, akışkanlar dinamiğini ve yoğun veri optimizasyonlarını saniyeler içinde otomatikleştirdikçe insan zihni o uzun yıllardır mahkûm olduğu "hesap makinesi" rolünden adeta özgürleşiyor. Sayısal bağların yapay zekânın omuzlarına bindiği bu yeni çağda, fizikçi en nihayetinde bilimin felsefi mutfağına geri dönmek zorunda kalıyor. Asıl sorumuz da tam burada başlıyor: Bilimin felsefi mutfağına dönerken yanımıza neler alacağız?

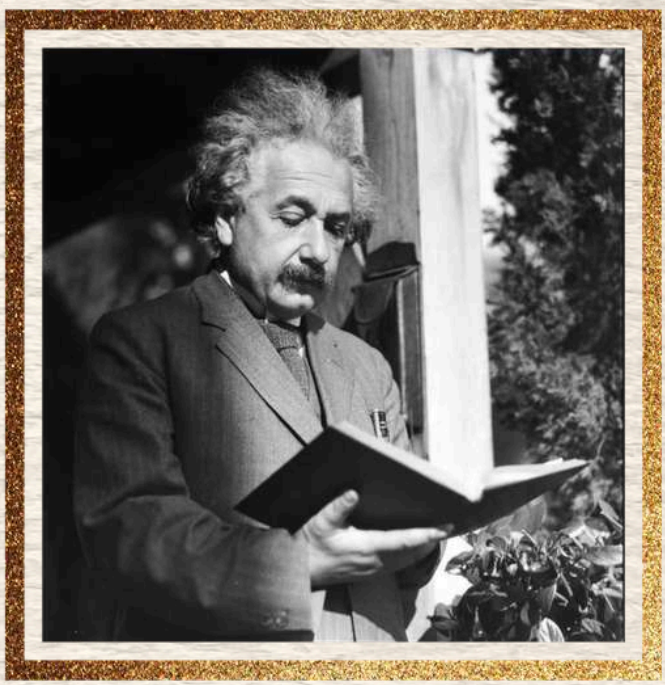


İşte bu noktada, mutfağa dönerken almamız gereken hayati araç fiziksel sezgidir. Ama fiziksel sezgiyi öncelemek demek, yapay zekânın sunduğu devasa imkânları reddetmek ya da onu fiziğin dışında tutmak demek değil. Aksine, yapay zekâ fiziğin gördüğü en güçlü "deneysel ve nümerik laboratuvar" olarak yerini almalıdır. Ölçümleri ona yaptırmak, veri setlerindeki gizli kalıpları onunla taratmak, milyarlarca değişkenli diferansiyel denklemleri veya tensör hesaplarını onun işlem gücüne devretmek fiziğin doğasına aykırı olmayıp adeta bizim önümüzü açan bir özgürleşmedir. Fakat çizginin net çekilmesi gerekiyor. Yapay zekâ dil modelleriyle ve soyut akıl yürütme algoritmalarıyla felsefi taklitler yapabilecek kadar gelişse bile o sadece sistemin parametrik uzaydaki en ideal noktasını bulan bir aktördür, insan zihninin ontolojik özgürleşmesinin yerine geçmemelidir.

Fizik tarihi de bize gösterir ki, fiziği dönüştüren şey hiçbir zaman sadece hesaplama gücü olmamıştır. Planck; siyah cisim ışıması verilerini önünde bulduğunda veya matrisleri çarparken değil, enerjiyi kesikli (kuanta) sayma gibi ontolojik bir cesaret gösterdiğinde kuantum devrimini başlattı. Einstein, Lorentz dönüşümlerinin matematiksel kargaşaları içinde boğulmak yerine, "Işık hızında bir ışınla yan yana koşsaydım ne görürdüm?" sorusundaki o saf düşünce deneyiyle uzay-zamanın dokusunu yeniden tanımladı. Bütün bu tarihsel kırılmalar; verinin veya matematiğin kendi kendine ürettiği çıktılar değil, zihnin doğanın arkasındaki yapıya yaptığı kavramsal sıçramalardı.

Yapay zekâ devrinde de bu kavramsal sıçramalar için olanak mutlaka artacaktır; işte bu yüzden biz yapay zekâyı hesaplamanın, ölçümün ve simülasyonun başına oturturken, kendimizi tam da olması gereken yere - fiziğin felsefe mutfağına - çekmeliyiz. Çünkü bir yapay sinir ağı, Lagranjiyen'i veya Hamiltonian'ı kusursuzca optimize edip bir kütleçekimsel sistemi 10^{-6} hata payıyla simüle edebilir. Ancak bize o simülasyonun arkasındaki simetriyi, Noether teoreminin işaret ettiği o zarif korunum yasalarını ya da evrenin neden o belirli matematiksel dokuya boyun eğdiğini veremez. Yapay zekâ parametrize edilmiş uzayda en ideal noktayı bulur fakat o noktanın ontolojik anlamını inşa etmek, doğaya "Neden?" sorusunu sormak yine insan zihnine kalacaktır. Fiziği fizik yapan şey denklemin sağ tarafı ile sol tarafının istatistiksel eşitliği değil, o eşitliğin gerçekliğin dokusunda neye denk geldiğidir.





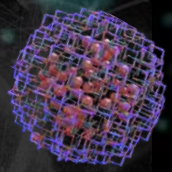
Geçmişte de günümüzdeki bu tartışmalar gibi pek çok örnek oldu. Lord Kelvin gibi isimler bile fiziğin artık bittiğini, geriye sadece mevcut denklemlerin virgülden sonraki basamaklarını hesaplamanın kaldığını düşündü. Einstein, veriyi mükemmelleştiren bir mühendis gibi değil; "zaman" ve "eşzamanlılık" kavramlarının ontolojik tanımını baştan kuran bir filozof gibi hareket etti. Benzer şekilde, kuantum mekaniğinin doğuşu bir "veri bolluğu" sonucu gerçekleşmedi. Eksik olan şey hesaplama gücü değil, "ölçülebilir olan ile gerçek olan arasındaki ilişkiyi" sorgulayacak epistemolojik bir derinlikti. Bohr ve Einstein arasındaki o meşhur tartışmalar, denklemlerin nasıl çözüleceği üzerine değil; gerçekliğin zihinden ve gözlemden bağımsız var olup olamayacağı üzerineydi. O gün o felsefi kavgalar verilmeseydi, bugün öğrendiğimiz kuantum halleri ve operatör cebiri sadece soyut birer sembolden ibaret kalmaz mıydı?

İşte tam da bu yüzden, kuantumun ve ileri mekaniğin soyut duvarlarıyla karşılaşan bir fizikçinin sorgulaması şarttır. Yapay zekâ verideki örüntüleri kusursuzca bulabilir, Hilbert uzayında en ideal noktaya ulaşabilir ya da tensör hesaplarını saniyeler içinde tamamlayabilir. Ancak "bir operatörün veya parametrenin fiziksel olarak ne anlama geldiğini" ve "doğaya hangi sorunun sorulması gerektiğini" belirleyen şey hesaplama değil, felsefi sorgulamadır.

Felsefeden arındırılmış bir fizik, harika çalışan ama ne inşa ettiğini bilmeyen bir şantiyeye benzetilebilir. Günümüzdeki uygulamalı fizik ve teknoloji dünyası zaten bu "ne inşa ettiğini bilmeden harika çalışan" şantiyelerle dolu. Yapay zekânın sunduğu bu yeni çağda, belki de asıl sorumluluğumuz eski usul veri işlemek değil; zihni, dilin ve mevcut paradigmaların sınırlarından kurtarıp evrenin ontolojik dokusuna dair yeni sorular üretmektir. Biz doğaya sorgulayıcı ve felsefi bir gözle bakmayı bıraktığımız an, yapay zekâ ne kadar gelişirse gelişsin, sadece kendi kurduğumuz zihinsel hapishanelerin en optimize edilmiş versiyonlarında yaşamaya devam ederiz.

Biz mutfağa dönerken yanımıza hesap makinelerini değil; doğaya doğru soruyu sorma cesaretini, Noether'in simetrilerini ve evrenin anlaşılabilir olduğuna dair o inatçı fizikçi sezgisini alıyoruz. Yapay zekâ ölçümü ve hesabı mükemmelleştirirken, felsefe mutfağında durup karanlığa bakma cesaretini gösterecek olan hâlâ fizikçinin sorgulayan zihnidir. Çünkü fizik, hesaplamanın bittiği ve "Neden?" sorusunun başladığı o eşikte nefes alır.

BOYUTUN RENGİ: KUANTUM NOKTALARININ İŞLEYİŞİ



Hakan B. Yoleri

HAKEM

EDİTÖR
YFD YAYIN KURULU

KUANTUM NOKTALARI NEDİR ?

Kuantum noktaları, boyutları genellikle sadece birkaç nanometre olan (nanometre metrenin milyarda biri olduğu için gerçekten çok küçükler) yarı iletken nanokristallerdir. Malzeme bu kadar küçük boyutlara inince kuantum mekaniği kuralları belirginleşmeye başlar ve malzeme artık klasik fizikten ziyade kuantum mekaniğinin etkilerine göre şekillenmeye başlar.

Kuantum noktalarını temelde özel yapan sebeplerden biri optik ve elektronik özelliklerinin sadece yapıldığı malzemeye değil, aynı zamanda kuantum noktalarının boyutuna bağlı olmasıdır. Aynı malzemeden yapılmış iki kuantum noktası farklı boyutlarda farklı ışıklar verebilir. Bu özelliğin temel sebeplerinden biri “kuantum hapsi” adı verilen fiziksel olayda bulunur.

Kuantum noktalarının tarihi ilk olarak 1980’li yıllarda Alexei Ekimov’un cam içinde bulunan yarı iletken nanokristal malzemenin boyutuna bağlı optik özelliklerinin değişmesini gözlemlemesi ile başladı; ardından 1990’lı yıllarda ise Moungi Bawendi ve çalışma arkadaşları kuantum noktalarının boyutlarını daha homojen (aynı çözelti içinde yaklaşık aynı boyutta kuantum noktaları) sentezlemeyi başararak kuantum noktalarının teknolojide kullanılabilmesinin önünü açtı. Bu çalışmalar 2023 Nobel Kimya Ödülü’nün Moungi Bawendi, Louis Brus ve Alexei Ekimov’a verilmesini sağladı.

Günümüzde kuantum noktaları; ekran teknolojilerinden güneş pillerine, biyolojik görüntülemeden sensörlere ve kuantum teknolojilerine kadar çok geniş bir alana sahip. Ancak kuantum noktalarının önemi sadece teknolojiyle sınırlı değildir; bu yapılar aynı zamanda sadece malzemenin boyutunun değişmesi ile fiziksel özelliklerinin nasıl değişebileceğini gösteren çok güzel kuantum mekaniği örneklerindendir.

ASIL FIZIK: KUANTUM HAPSI

Normal boyutlardaki yarı iletken parçalarda elektronlar, valans bandı ve iletim bandı adı verilen enerji bölgelerinde hareket eder. Bu iki bant arasındaki enerji farkına band gap (bant açıklığı) denir ve;

$$E_g = E_c - E_v$$

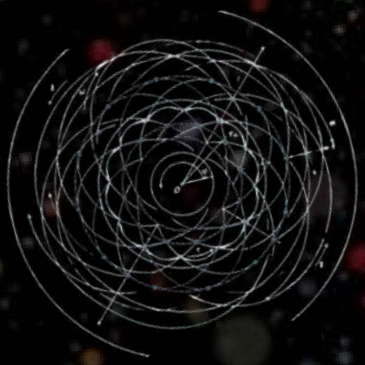
şeklinde hesaplanır. Burada:

E_g = band gap enerjisi

E_c = iletim bandı enerjisi

E_v = valans bandı enerjisidir.

Yani malzemedeki elektron, Eg kadar enerji aldığında valans bandından iletim bandına geçer.



Cisim nanometre boyutlarına küçüldüğünde band gap'teki kuantum etkileri artık hesaba katılır, hatta belirleyici olabilecek kadar artar ve denklem;

$$E_g(R) = E_g(\text{bulk}) + \frac{\hbar^2\pi^2}{2R^2}\left(\frac{1}{m_e^*} + \frac{1}{m_h^*}\right) - \frac{1.8e^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R}$$

hâlini alır. Burada:

$E_g(R)$ = R yarıçapındaki kuantum noktasının band gap enerjisi

$E_g(\text{bulk})$ = aynı malzemenin büyük hacimli hâldeki band gap'i

R = kuantum noktasının yarıçapı

m_e^* = elektronun etkin kütlesi

m_h^* = deliğin etkin kütlesi

ε_r = malzemenin bağıl dielektrik sabiti

ε_0 = boşluğun dielektrik sabitidir.

Bu denklemde bizim için önemli olan taraf, çok küçük boyutlarda kuantum hapsinden gelen enerjinin band gap üzerindeki etkisinin yaklaşık olarak kuantum noktasının yarıçapının karesiyle ters orantılı olmasıdır:

$$\Delta E_g \propto \frac{1}{R^2}$$

Yani parçacığın boyutu küçüldükçe elektronları iletim bandına ulaştırmak için daha fazla enerji gerekir.

KUANTUM NOKTALARININ IŞIK İLE ETKİLEŞİMİ

Kuantum noktalarının en önemli özelliklerinden biri ışığı soğurup ardından tekrar ışık yayabilmeleridir. Bir fotonun enerjisi yeterliyse kuantum noktasında valans bandında duran elektronu iletim bandına geçirebilir ve iletim bandındaki elektron arkasında valans bandında bir delik (hole) bırakır. Elektron ve deliğin birlikte oluşturduğu bu bağlı yapıya "eksiton" denir.
Elektron iletim bandına çıktıktan sonra enerjisinin bir kısmını kaybederek daha düşük enerjili bir duruma gevşeyebilir ve daha sonra bu elektron delik ile yeniden birleşirse bu enerjiyi çevreye foton olarak yayabilir. Bu olaya fotolüminesans (PL) denir ve yayılan fotonun enerjisi;
$E = h\nu = hc/\lambda$
bağıntısı ile hesaplanabilir. Burada:
E = foton enerjisi
h = Planck sabiti
ν = frekans
c = ışık hızı
λ = dalga boyudur.
Bu denklemde de görüldüğü gibi bu enerji ile dalga boyu ters orantılıdır.

Elektronun soğurduğu ve yaydığı enerji tam olarak aynı olmayabilir. Elektron ışık yaymadan önce enerjisinin bir kısmını titreşim gibi çeşitli yollarla kaybedebilir. Bu yüzden yayılan ışığın enerjisi genellikle absorbe edileninkinden daha düşüktür, ters orantılı olarak dalga boyu da daha büyüktür. Bu enerji farkına Stokes kayması denir.

Absorpsiyon → Elektronun uyarılması → Gevşeme → Elektron-delik birleşmesi → Işık yayımı

Sonuç olarak kuantum noktası küçüldükçe band gap enerjisi büyür. Bu kuantum noktasına band gap enerjisiyle yaklaşık aynı ya da bundan daha büyük enerjiye sahip fotonlar verilir, elektronlar iletim bandına çıkarılır ve oluşan delik ile birlikte bir eksiton oluşturulur. Bir süre sonra delik ile elektron tekrar birleşir ve etrafa bir foton yayabilir. Foton enerjisi arttıkça dalga boyu azalır.

Yarıçap ↓ → Enerji ↑ → Dalga boyu ↓ → Maviye kayma
Yarıçap ↑ → Enerji ↓ → Dalga boyu ↑ → Kırmızıya kayma

Yani kuantum noktasının absorpsiyon ve emisyon dalga boyları boyutuna bağlı olarak değişir. Bu nedenle kuantum noktasının boyutu kontrol edilerek yaydığı ışığın rengi kontrol edilebilir.

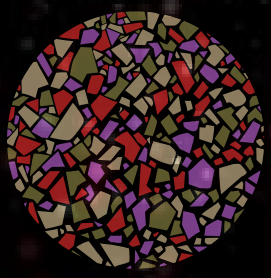
KUANTUM NOKTASI NASIL ÜRETİLİR?

Kuantum noktaları farklı yöntemler ile üretilebilir. En yaygın üretilme şekillerinden biri uygun kimyasal maddelerin bir çözelti içerisinde kontrollü bir şekilde tepkimeye sokulması ile nanokristallerin oluşturulmasıdır. Bu yöntemde tepkime süresi, sıcaklık ve kullanılan kimyasallar kuantum noktalarının boyutunu, dolayısıyla yaydıkları ışığın rengini etkiler.

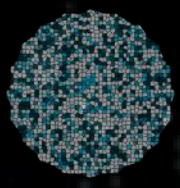
Bu kuantum noktalarının oluşturulması sırasında amaç sadece küçük noktalar elde etmek değil, aynı zamanda bunların birbirine yakın boyutlarda olmasını sağlamak ve daha kararlı kuantum noktaları oluşturmaktır. Bunun için parçacıkların yüzeylerinde ligand adı verilen moleküller kullanılır. Ligandlar, kuantum noktalarının birbirine yapışmasını önler ve çözeltinin daha kararlı kalmasına yardımcı olur.

Bazı kuantum noktalarını daha iyi korumak ve verimlerini artırmak için çevrelerine kabuk eklenir. Bu yapıya core-shell (çekirdek-kabuk) denir. Bu kabuk, kuantum noktasının yüzey kusurlarını azaltarak ve kuantum noktası ile başka maddeler arasındaki olası tepkimeleri engelleyerek verimi ve kararlılığı artırabilir.

Kuantum noktası üretimindeki en önemli hedeflerden biri, parçacıkların boyutlarını hassas bir şekilde kontrol etmektir. Birkaç nanometrelik bir boyut değişimi bile yayılan ışığın rengini değiştirebilir.











KUANTUM NOKTALARI NASIL İNCELENİR?

Kuantum noktalarının kristal yapılarını ve optik özelliklerini anlamak için farklı deneysel yöntemler kullanılır. Her deney yöntemi farklı özellikler gösterdiğinden genellikle hepsi birlikte değerlendirilir.

Kuantum noktalarının ışıkla etkileşimini incelemek için genellikle UV-Vis spektroskopisi kullanılır. Bu yöntemde noktanın hangi dalga boylarındaki ışıkları soğurduğu incelenir. Farklı dalga boylarındaki ışıklar kuantum noktasına gönderilir ve hangilerinin soğurulduğuna, hangilerinin soğurulmadan geçtiğine bakılır.

Kuantum noktasının ışık ile etkileşimini incelemenin başka bir yolu PL spektroskopisidir. Bu ölçümde kuantum noktası belirli bir dalga boyu ile uyarılır ve daha sonra yaydığı ışığın dalga boyu ve şiddeti ölçülür. Bu sayede emisyon piki, Stokes kayması ve emisyonun ne kadar geniş bir dalga boyu aralığına yayıldığı incelenir.

Kuantum noktalarının fiziksel boyutlarını ve şekillerini görmek için TEM (geçirimli elektron mikroskobu) kullanılır. Elektronların çok ince bir parçadan geçirilmesi ile görüntü oluşur ve bu yöntem nanometre düzeyindeki parçaların doğrudan gözlemlenmesini sağlar.

Kuantum noktasının kristal yapısını incelemek için XRD (X ışını kırınımı) kullanılır. Bu sayede kristal düzlemler arasındaki mesafe ve yaklaşık kristal boyutları hakkında bilgi alınabilir.
Kuantum noktasının yüzeyini incelemek için AFM (atomik kuvvet mikroskobu) kullanılır. Nanometre ölçeğinde keskin bir uç ile kuantum noktasının yüzeyi taranarak yüzey topografyası benzeri bulgular elde edilir.

Bu yöntemlerin her biri başka konularda bilgi verdiğinden genelde hepsi birden kullanılarak kuantum noktaları incelenir.

SONUÇ:

Kuantum noktaları, nanometre ölçeğindeki değişimin malzemenin elektronik ve optik özelliklerini nasıl değiştirebileceğini gösteren çok önemli yapılardır. Kuantum hapsi sayesinde parçacığın boyutu küçüldükçe enerji seviyesi değişir ve yayılan ışığın rengi kontrol edilebilir hâle gelir.
Bu özellikleriyle kuantum noktaları, hem kuantum mekaniğinin anlaşılması açısından hem de yeni nesil teknolojilerin geliştirilmesi açısından önemlidir. Kısacası kuantum noktaları, “Bir malzemenin boyutunu değiştirerek fiziğini ne kadar değiştirebiliriz?” sorusuna verilen en etkileyici cevaplardan biridir.

KAYNAKÇA:

Alivisatos, A. P. (1996). Semiconductor clusters, nanocrystals, and quantum dots. Science, 271(5251), 933–937. https://doi.org/10.1126/science.271.5251.933

Brus, L. E. (1984). Electron–electron and electron–hole interactions in small semiconductor crystallites: The size dependence of the lowest excited electronic state. The Journal of Chemical Physics, 80(9), 4403–4409. https://doi.org/10.1063/1.447218

Hines, M. A., & Guyot-Sionnest, P. (1996). Synthesis and characterization of strongly luminescing ZnS-capped CdSe nanocrystals. The Journal of Physical Chemistry, 100(2), 468–471. https://doi.org/10.1021/jp9530562

Murray, C. B., Norris, D. J., & Bawendi, M. G. (1993). Synthesis and characterization of nearly monodisperse CdE (E = sulfur, selenium, tellurium) semiconductor nanocrystallites. Journal of the American Chemical Society, 115(19), 8706–8715. https://doi.org/10.1021/ja00072a025

Royal Swedish Academy of Sciences. (2023, October 4). The Nobel Prize in Chemistry 2023 [Press release]. NobelPrize.org. https://www.nobelprize.org/prizes/chemistry/2023/press-release/

MADELUNG DENKLEMLERİ: KUANTUM MEKANİĞİNİN HİDRODİNAMİK YENİDEN FORMÜLASYONU

ARIF OZAN ÖKSÜZOĞLU

HAKEM
DR. HAKAN ÖKSÜZOĞLU

EDİTÖR
YFD YAYIN KURULU

GİRİŞ

Kuantum mekaniğinin keşif sürecinin başlangıç dönemi boyunca karşılaşılan problemlerin çözümü ve anlamlandırılması için bir dizi farklı girişimde bulunulmuştur. Bu perspektifler, basit problemleri modellemek için başarılı olsa da çoklu cisim problemlerinde ve periyodik olmayan durumlarda yetersiz kalmıştır. Matematiksel yaklaşımların çoğu, çelişkili sonuçlar vererek gerçekliğin tutarlı bir tasvirini oluşturmakta başarısız olmuştur. Bu tarihsel süreç bizi Werner Heisenberg'in matris mekaniğinin ve Erwin Schrödinger'in dalga mekaniğinin başarısıyla modern anlayışa yaklaştırmıştır. Nitekim alternatif formülasyonların ve yorumlamaların bir kısmı hâlâ hayatta kalmayı başarmış ve kendileri için bir tartışma ortamı bırakmıştır. Alternatif kuramlar arasında en etkililerinden birinin de Broglie ve Bohm tarafından geliştirilen pilot dalga teorisi olduğu ifade edilebilir.

Bu yazıda ise pilot dalga teorisi kadar popüler olmayan, ancak onunla yakından ilişkili ve hatta onun matematiksel temeli için bir başlangıç olan, farklı bir yeniden formülasyonu inceleyeceğiz. Bu formülasyon Madelung denklemleri adıyla bilinir. Madelung denklemleri, yeni bir fizik ortaya atmayı veya Kopenhag yorumuna rakip bir anlayış sunmayı amaçlamaktansa Schrödinger'in denkleminin akışkanlar mekaniğinin değişkenleri ve denklemleri üzerinden yeniden tanımlanabileceğini göstermeye yönelik bir atılımdır. Bu durum, Madelung denklemlerinin Schrödinger denklemiyle her koşulda aynı gerçekliği temsil edeceği anlamına gelmemektedir. Madelung denklemlerinin fiziksel gerçeklikle uyumuna yönelik ön koşullar metnin ileri kısımlarında tartışılacaktır, kuantum dünyaya nasıl yeni bir pencere açtığı irdelenecektir.

DENKLEMLERİN TÜRETİLMESİ

Madelung Dönüşümü

Dalga fonksiyonunu, kompleks değerli bir fonksiyon olmasına rağmen iki reel fonksiyon cinsinden ifade etmek mümkündür ve bunu yine kompleks sayıların özelliklerinden faydalanarak gerçekleştirebiliriz. İlk adım olarak dalga fonksiyonunu polar koordinatlar üzerinden yeniden yazmakla başlayalım. Sürekli bir dalga fonksiyonunun modülünün karesi taneciğin belirli bir konumda bulunma olasılık yoğunluğunu (ρ) verir. Bu sebeple radyal değişkenimiz olasılık yoğunluğu fonksiyonunun karekökü √ρ olacaktır. Açısal değişkenin nasıl ifade edilmesi gerektiği ise daha az barizdir. Türetimin sonraki adımlarında ispatlayacağımız üzere dalga fonksiyonunun fazının, klasik mekanikte sıkça karşılaştığımız eylem niceliği ile doğrudan bağlantılı olduğu görülecektir. Faz değişkeninin boyutsuz olması gerektiğinden eylemi, onunla aynı boyuta sahip bir sabit ile bölmek gerekmektedir. Türetilecek ifadelerin Schrödinger denkleminin kuantum özellikleriyle uyum gösterebilmesi için en uygun tercih, indirgenmiş Planck sabitidir. Bu şekilde aşağıdaki formu elde ederiz.

$$\psi(\mathbf{x},t) = \sqrt{\rho(\mathbf{x},t)}\, e^{iS(\mathbf{x},t)/\hbar}$$

İkinci adımımız basit bir fikirle polar formu Schrödinger denklemine yerleştirmek olacaktır.

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{x},t)\right]\psi(\mathbf{x},t)$$

Denklemin zamana bağlı kısmi türevlerini ve konuma bağlı kısmi türevlerini içeren terimleri ayrı ayrı inceleyelim.

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(\frac{\partial\sqrt{\rho}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}\sqrt{\rho}\frac{\partial S}{\partial t}\right)e^{iS/\hbar}$$

$$\nabla^2\psi = \left[\nabla^2\sqrt{\rho} - \frac{1}{\hbar^2}\sqrt{\rho}(\nabla S)^2 + \frac{2i}{\hbar}\nabla\sqrt{\rho}\cdot\nabla S + \frac{i}{\hbar}\sqrt{\rho}\nabla^2 S\right]e^{iS/\hbar}$$

Ardından bu iki terimi denklemde geri yerlerine koyalım ve üstel çarpanları sadeleştirelim. Bu karmaşık matematiksel ifade, basitleştirilmek için reel ve imajiner kısımlarına ayrılabilir.

$$i\hbar\left(\frac{\partial\sqrt{\rho}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}\sqrt{\rho}\frac{\partial S}{\partial t}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\nabla^2\sqrt{\rho} - \frac{1}{\hbar^2}\sqrt{\rho}(\nabla S)^2 + \frac{2i}{\hbar}(\nabla\sqrt{\rho})\cdot\nabla S + \frac{i}{\hbar}\sqrt{\rho}\nabla^2 S\right] + V\sqrt{\rho}$$

İmajiner kısmın iki tarafını √ρ ile çarpmak denklemdeki kareköklerden kurtulmamıza olanak sağlar.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\rho\frac{\nabla S}{m}\right) = 0$$

Reel kısımda ise iki tarafı √ρ ile bölersek denklemdeki √ρ'ları tek bir terim altında toplayabiliriz. Bu terim, kuantum potansiyeli olarak adlandırılır. Kuantum potansiyeli ile birlikte reel kısım artık modifiye edilmiş kuantum Hamilton-Jacobi denklemi hâlini alır ve bu ifadenin, dalga fonksiyonunun fazını eylem olarak almamızın sebebinin dinamik bağlamdaki doğrudan karşılığı olduğu söylenebilir.

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V + Q = 0$$

$$Q := -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} = -\frac{\hbar^2}{4m}\left[\frac{\nabla^2\rho}{\rho} - \frac{1}{2}\left(\frac{\nabla\rho}{\rho}\right)^2\right]$$

Bu denklem ve kuantum potansiyeli, girişte bahsettiğimiz de Broglie-Bohm kuramının önemli yapı taşlarından ikisini oluşturmaktadır. Hamilton-Jacobi denklemi kendisi için ayrı bir yazıyı hak edecek derinlikte bir konudur, bu sebeple yazımızın kapsamına girmeyecektir ancak kuantum potansiyelinin fiziksel anlamı, anlatımın devamında detaylandırılacaktır.

Hamilton-Jacobi denklemine ulaşmakla kalmayıp bir sonraki adım olarak ifadenin gradyenini almak denklemi son formuna ulaştırmamızı sağlayacaktır. Öncelikle yeni bir değişken tanımlamalıyız: bir hız alanı. Eylemin gradyeninin kütleye bölümü ile tanımlanan bu nicelik, olasılık bulutunun değişim hızını tasvir edecektir. Bu son hamle ile iki denklem, Madelung denklemleri hâline gelir.

$$\mathbf{v} = \frac{\nabla S}{m}$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{m}\nabla(V+Q)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0$$

Dalga fonksiyonunu ρ yoğunluk ve v hız fonksiyonlarına çevirme işlemi Madelung dönüşümü olarak bilinir.

Euler Denklemleri

Bir akışkanın yoğunluk, viskozite, sıkıştırabilirlik ve ısı geçirgenliği gibi birçok farklı özelliği söz konusudur. Bir akışkanın en genel durumu ve davranışı Navier-Stokes denklemleri aracılığıyla hesaplanır. Ancak viskozite kavramını denklemden çıkarırsak geride kalan matematiksel model görece daha basitleşir. Günlük hayatta pek karşılaşmadığımız viskoz olmayan bu özel durumun matematiği, Euler denklemleri adını alır. Denklemler, v(x,t) akışkanın hız alanını, ρ(x,t) kütle yoğunluğunu, P(x,t) basınç alanını, f birim kütle başına dışsal kuvvet miktarını ifade etmek üzere aşağıdaki biçimde sunulur.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \qquad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{f}.$$

İlk denklem süreklilik denklemi olarak bilinir ve bir akış içerisinde kütlenin korunumu prensibini temsil eden eşitliktir. Belirli bir hacimdeki toplam yoğunluğun yani kütlenin zamana göre değişiminin, o hacme giren ve çıkan toplam madde miktarına eşit olması gerektiği fikrinden türetilir. İkinci denklem momentum denklemi olarak adlandırılır ve bir akış içerisindeki momentumun korunumu prensibinden elde edilir. Bu denklem viskozitesi sıfır olan akışkanlar için Newton denkleminin karşılığı olarak düşünülebilir. Sol tarafta ivme ifadesi verilirken sağ tarafta kuvvet yoğunluğunun kütle yoğunluğuna oranı vardır.

Fiziksel Yorum

Madelung denklemlerini ilginç kılan en önemli faktörlerden birisi Euler denklemleri ile arasındaki çarpıcı benzerliktir. Sadece matematiksel olarak değil, fiziksel bağlamda da bir paralellik öne çıkar. Viskoz olmayan bir akışkanın kütle yoğunluğu fonksiyonu ile bir kuantum parçacığın olasılık yoğunluğu fonksiyonunu aynı ρ sembolü ile temsil etmek ortak dinamikleri gün yüzüne çıkarmayı kolaylaştırır.

Süreklilik denklemleri matematiksel olarak birebir eş değerdir. Euler denklemleri nasıl kütlenin korunumunu gösteriyorsa, Madelung denklemleri de toplam olasılığın korunduğu ve ihtimallerin yok yere kaybolmadığı gerçeğini gözler önüne serer.
Diğer denklemlerin, yani sistemin dinamiğini tanımlayan ifadelerin ortak kısımları vardır hatta sol tarafları aynıdır ancak sağ taraftaki ifadedeki benzerlik ilk bakışta çok çarpıcı değildir. -(1/m)∇(V) terimi ile f dışsal kuvvet yoğunluğunun birbirlerine denk geldiği anlaşılabilir ancak -(1/ρ)∇p basınç teriminin doğrudan bir karşılığını Madelung denklemlerinde görememekteyiz. Bunun iki sebebi vardır. İlki, Madelung denklemlerinin bir kuantum potansiyel terimi ile modifiye edilmiş olmasıdır. İkincisi ise Madelung denklemlerinin genel bir viskoz olmayan akışkan sınıfında değil, barotropik akışkan adındaki özel bir sınıfın içerisinde yer almasıdır.

Kuantum Potansiyeli

Kuantum potansiyelinin, bir parçacığın kuantum özelliklerinin tek ifadeye sıkıştırılmış bir hâli olduğu düşünülebilir. İndirgenmiş Planck sabitini içermesi bu durumla yakından ilişkilidir. Bir parçacığın hareketine, Schrödinger denklemleri kapsamında, rehberlik eden bir terimdir. de Broglie-Bohm kuramında istatistiksel bir niceliktense gerçekten parçacıklara yol gösteren somut bir alanı temsil eder.

Madelung denklemlerinde böyle alternatif yorumlamalar zorunlu değildir, basitçe Euler denklemlerinin farklılaşmasını sağlayarak karmaşık dinamikleri kapsamı altına alabilmesine vesile olur. Bu işlevi gösterebilmesi için matematiksel yapısı non-lineer ve non-lokal özellik gösterir. Non-lineerlik niteliği çok tuhaf değildir çünkü Euler denklemleri de standart hâliyle non-lineerdir ve çoğu durumda akışkanlar basit süperpozisyon davranışları göstermez. Nitekim non-lokalite, Euler denklemleri ile arasında sert bir kontrast çizer çünkü klasik bir akışkan neredeyse her zaman içerisindeki taneciklerin yerel etkileşimleri ile dinamiğini inşa eder. Kuantum potansiyeli sadece yerel kısmi türevlere bağlı gibi görünse de çoklu parçacıklı sistemlerde dolanıklık ilişkileri sebebiyle dalga fonksiyonlarının global özelliklerinden de etkilenir. Madelung denklemleri, kuantum mekaniğinin yerel olmayan dinamiklerini tasvir edebilmesi için böyle bir terime ihtiyaç duyar.

Barotropiklik

Barotropiklik, bir akışkanın yoğunluk fonksiyonunun doğrudan sadece basınç fonksiyonuna bağlı olduğu ρ(p) spesifik bir durumdur. Madelung denklemlerinin yapısı ile barotropikliğin matematiksel özellikleri arasındaki ilişki sayesinde hız alanını barotropik bir akış biçimine benzetebiliriz. Bunun için ilk adım olarak Euler denklemlerindeki -(1/ρ)∇p basınç teriminin rotasyonelini incelemeliyiz.

$$\nabla \times (-\frac{1}{\rho}\nabla p) = \frac{1}{\rho^2}\nabla\rho(p) \times \nabla p$$

Barotropiklik koşulundan faydalanarak yoğunluğun gradyenini zincir kuralı sayesinde;

$$\nabla\rho(p) = \frac{d\rho}{dp}\nabla p$$

biçiminde yazabiliriz.

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{dp}\nabla p \times \nabla p = 0$$

Bu sonucu, basınç teriminin Madelung denklemlerindeki karşılığı -(1/m)∇(Q) ile kıyaslarsak ikisinin de rotasyonellerinin sıfır olduğu, yani matematiksel yapılarının birbirleri arasında ortak bir dinamik tanımladığı sonucuna varabiliriz. Fakat bu durum kuantum potansiyeli için de basit skaler bir basınç fonksiyonunun her zaman tanımlanabileceği anlamına gelmez, bir kuantum basınç tensörünün hesaplanması gerekir.

İRROTASYONELLİK

İrrotasyonellik, bir akışkanın tekil parçacıklarının kendi eksenleri etrafında dönme hareketi gerçekleştirmediği akış biçimidir. Yerel dönüşlerin ölçüsü olan hız vektörünün rotasyoneli her yerde sıfırdır: $\nabla \times v = 0$. Bu sebeple hız vektörünü, bir hız potansiyelinin gradyeni cinsinden ifade edebiliriz: $v = \nabla\phi$. Klasik akışkanlarda irrotasyonel davranış, girdap ve benzeri yapıların oluşumunu engeller. Madelung denklemlerindeki hız fonksiyonunun irrotasyonel bir akışa uyduğunu direkt tanımından görebiliriz. $v = \nabla S/m$ ifadesi bize doğrudan bir hız potansiyelinin varlığını sunuyor ve hızın rotasyonelinin sıfır olduğunu rahatlıkla görebiliyoruz. Bunun fiziksel anlamını düşünürken aceleci sonuçlara varmamalıyız. İlk bakışta bu akış biçimi olasılık bulutları içerisinde kuantum girdaplarının oluşamayacağını gösteriyor zannedilebilir ancak bu çıkarım, Madelung dönüşümünün yetersizliklerinden kaynaklanan bir yanılgı. Dönüşüm, S eyleminin çoklu değerli olabildiği ve sürekli olmadığı durumlar için geçerliliğini yitiriyor. Bu kapsamda tutarlı bir matematiksel çerçeve geliştirmek için bir kuantizasyon koşulunun zorunluluğu ortaya çıkıyor.

KUANTİZASYON KOŞULU

Madelung dönüşümlerinin altında yatan derin problem, dalga fonksiyonu polar koordinatlar cinsinden ifade edildiğinde yeni elde edilen tanım kümesinin topolojik yapısının kusurlara açık olmasıdır. Bu topolojik kusurlar, olasılık yoğunluğu fonksiyonunun sıfır olduğu noktalardan kaynaklanır çünkü radyal değişken sıfır ise faz değişkeni tamamen belirsizdir, çoklu değerlere sahip olabilir hatta direkt tanımsız olabilir. Her noktada tanımlı ve sürekli bir dalga fonksiyonunun sıfır olduğu değerler yüzünden Madelung denklemlerinin tanımlandığı uzayda bazı noktalarda veya bölgelerde deliklerin oluşması gözlemlenir.

Göreceğimiz üzere bu delikler uzayın lokal ölçeğinin ötesinde global topolojisini de etkileyerek dalga fonksiyonunun iyi tanımlanmamış bir matematiksel yapı olmasına yol açar. Dalga fonksiyonunu tek değerli hâle getirebilmek için polar koordinatların periyodik özelliklerinden faydalanarak bir koşul inşa edebiliriz. M uzayında çalıştığımızı farz edelim ve bir eğri tanımlayalım: $\gamma : [0,1] \to M$. Bu eğri kapalı olsun, yani $\gamma(0) = \gamma(1)$. Bu tanımlar ile dalga fonksiyonunun tek değerliliği şu şekilde ifade edilebilir.

$$\psi(\gamma(1), t) = \psi(\gamma(0), t)$$

Şimdi polar biçimde yeniden yazalım. $S(\gamma(1))$ ve $S(\gamma(0))$ ifadeleri eylemin aynı noktada aldığı farklı değerleri temsil etmektedir.

$$\sqrt{\rho(\gamma(1))}\, e^{iS(\gamma(1))/\hbar} = \sqrt{\rho(\gamma(0))}\, e^{iS(\gamma(0))/\hbar}.$$

Eğer eğrimiz dalga fonksiyonunun sıfır olduğu noktalardan geçmiyor ise ifade buna indirgenebilir.

$$e^{i\left(S(\gamma(1))-S(\gamma(0))\right)/\hbar} = 1$$

$e^{i\theta}$ fonksiyonunun 2π'nin tam sayı katlarında periyodik olması sebebiyle yukarıdaki koşulu bir kuantizasyon koşuluna dönüştürebiliriz.

$$\frac{S(\gamma(1)) - S(\gamma(0))}{\hbar} = 2\pi n \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Kapalı eğrinin aynı noktasındaki değerlerin farkını ifade etmek için o eğri üzerinde kapalı bir çizgi integrali tanımlayabiliriz.

$$\Delta_\gamma S := \oint_\gamma \nabla S \cdot d\mathbf{r} = 2\pi n\hbar$$

Eylemin gradyeni, hız ile kütlenin çarpımı $\nabla S = mv$ ve indirgenmiş Planck sabiti $\hbar = h/2\pi$ olduğu için kuantizasyon koşulumuz son hâlini alır.

$$\oint_\gamma m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = nh$$

Bu sonuç, Takabayasi-Wallstrom koşulu olarak bilinir ve bu kuantizasyon ile birlikte Madelung denklemleri tamamen Schrödinger denklemine eş değer hâle gelir.

MATEMATİKSEL YORUM

Bu koşul ilk bakışta anlamsız gelebilir çünkü genellikle fizikte çalıştığımız uzaylarda kapalı bir eğri üzerinde skaler bir fonksiyonun gradyeninin çizgi integrali her zaman sıfırdır. Nitekim bu bilgi daima geçerli olmak zorunda değildir, uzayın topolojik yapısının basit bağlantılı olmasını ön koşul olarak gerektirir. Boş olmayan bir uzay basit bağlantılı ise iki nokta arasında her zaman yine aynı uzay üzerinde sürekli bir eğri tanımlanabilir ve bu eğriler birbirlerine sürekli olarak dönüştürülebilir.

Bu tanımla ulaşılabilecek bir çıkarım, basit bağlantılı uzaylar üzerindeki her kapalı eğrinin kendi üzerine büzüştürülerek tek bir noktaya indirgenebileceğidir. Mesela karşıt bir örnek olarak bir uzayda delikler mevcut ise o delikleri çevreleyen kapalı eğriler tek bir noktaya büzüşemez, yani uzay basit bağlantılı değildir, aynı Madelung dönüşümünün oluşturduğu bazı uzaylar gibi. Kapalı bir eğri, deliğin etrafını sarmıyorsa gradyenin çizgi integrali sıfır kalmaya devam eder ancak eğri deliği çevreliyor ise tek bir noktaya sürekli olarak büzüştürülemez ve bu durum sıfırdan farklı bir değer çıkabilmesine sebep olur.

ÖRNEK

Bu koşulun gerekliliğini iki boyutlu kuantum girdap örneği ile matematiksel olarak somutlaştırabiliriz. Dalga fonksiyonumuzu, (r,ϕ) polar koordinatlar olmak üzere ψ(r,ϕ) = f(r)e^(inϕ) olarak tanımlayalım. Topolojik kusur oluşturmak için keyfî f fonksiyonunun sıfır noktasında sıfır değerini aldığını farz edelim. Bu tanım ile basitçe eylemin S(r,ϕ) = nℏϕ olacağını görebiliriz. Kuantizasyon koşulunu, merkezi orijinde olan bir çemberde uygulayalım.

$$\mathbf{v} = \frac{\nabla S}{m} = \frac{1}{m}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial \phi}\hat{\phi}\right) = \frac{n\hbar}{mr}\hat{\phi},$$

$$\oint m\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} = n\hbar\int_0^{2\pi} d\phi = nh$$

İki boyutlu temel düzey bir kuantum girdap modelinin koşul ile tutarlı olduğunu gözlemledik. Kuantizasyon olmadan hız alanının irrotasyonelliğinden ötürü bu tarz girdapların oluşamayacağı yanılgısına düşebilirdik ancak artık koşulumuz ile birlikte Schrödinger denklemlerinin sonuçları ile tutarlı bir uyum yakalayabildik.

SONUÇ

Bu çalışmada, kuantum mekaniğinin standart dalga formülasyonuna alternatif olarak geliştirilen Madelung denklemlerini; türetiliş aşamalarından, Euler denklemleriyle olan benzerlik ve farklarından yola çıkarak inceledik. Gördük ki Schrödinger denklemi, uygun bir polar dönüşüm, yani Madelung dönüşümü ile hidrodinamik değişkenlere uyarlanabildiğinde klasik akışkanlar mekaniği ile kuantum mekaniği arasında şaşırtıcı bir köprü kurmaktadır. Süreklilik ve momentum denklemleri bağlamında kurulan bu analoji, kuantum potansiyeli ve barotropiklik gibi kavramlar sayesinde kuantum dünyasının yerel olmayan (non-lokal) dinamiklerini klasik bir akışkan diliyle ifade etmemize olanak tanır.

Bununla birlikte, bu dönüşümün saf bir akışkanlar mekaniği yaklaşımıyla sınırlı kalmadığı, dalga fonksiyonunun fazındaki çoklu değerlilikten ve uzayın topolojik yapısından ötürü bazı kritik eksiklikler barındırdığı görülmüştür. İrrotasyonel varsayımın tek başına kuantum girdaplarını açıklamakta yetersiz kaldığı noktada devreye giren Takabayasi-Wallstrom kuantizasyon koşulu, Madelung denklemlerinin Schrödinger denklemiyle tam bir matematiksel eş değerlik yakalaması için hayati bir rol oynamıştır. Bu koşul, uzayın global topolojisinin ve delikli yapıların kuantum hâllerinin kararlılığındaki belirleyici etkisini gözler önüne sermektedir.

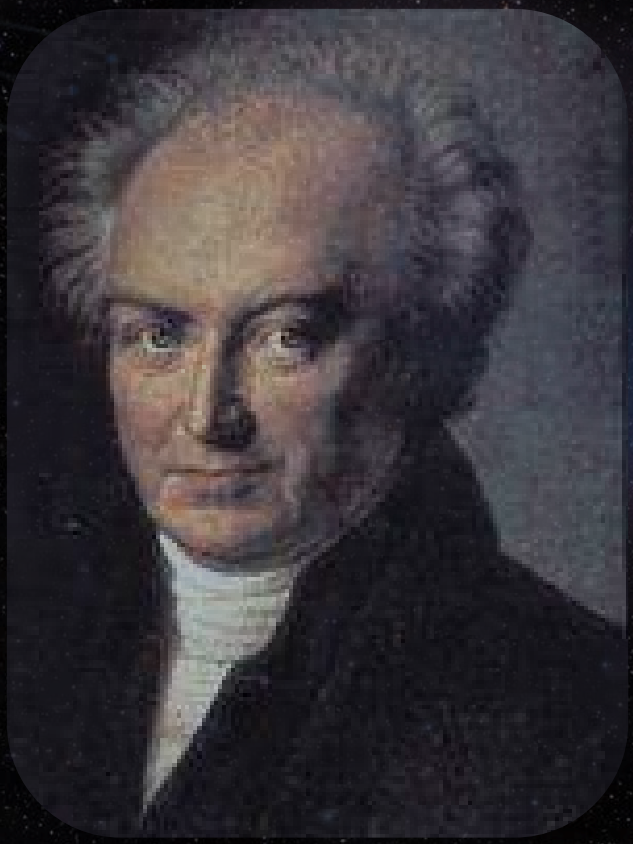
Sonuç olarak Madelung denklemleri, kuantum mekaniğine farklı bir epistemolojik ve analitik pencere açmaktadır. İster de Broglie-Bohm kuramının pilot dalga altyapısının bir matematiksel aracı olarak görülsün ister hidrodinamik bir perspektif sunsun, bu formülasyon kuantum ve klasik fizik arasındaki keskin sınırların aslında ne kadar esnek ve derin bir matematiksel uyum barındırdığını kanıtlamaktadır. Kuantum dünyasını akışkanlar diliyle okumak, hem fiziksel sezgilerimizi tazelemekte hem de gerçeğin matematiğini anlamada bize yepyeni ufuklar sunmaya devam etmektedir.

MİLYARLARCA YILDIZA RAĞMEN GÖKYÜZÜ NEDEN KARANLIKTIR?

IŞIL BURGAÇ

HAKEM
DOÇ. MURAT HÜDAVERDİ
DR. MUSA ÇAĞATAY OKYAY

EDİTÖR
YFD YAYIN KURULU



GİRİŞ

İnsanlık düşünmeye vakit bulabildiği ilk günden beri bu sorunun peşine düşmüş olsa da tatmin edici bir cevaba ulaşmak ancak evrenin işleyişini ve temel fizik yasalarını doğru kavramakla mümkün olmuştur. İnsanlar 20 yüzyılın başlarına kadar evrenin statik (durgun) ve sonsuz büyüklükte olduğunu düşünmüştür. Ayrıca yıldızların sonsuz yakıta sahip olduklarını, bu sebeple sonsuza kadar bulundukları enerjide kalmaya devam ettiklerine inanmışlardır. Kabul edilen bu işleyiş zamanın en güçlü paradokslarından birinin doğmasına yol açmıştır: Olbers Paradoksu.

OLBERS PARADOKSU

İnsanlık düşünmeye vakit bulabildiği ilk günden beri bu sorunun peşine düşmüş olsa da tatmin edici bir cevaba ulaşmak ancak evrenin işleyişini ve temel fizik yasalarını doğru kavramakla mümkün olmuştur. İnsanlar 20 yüzyılın başlarına kadar evrenin statik (durgun) ve sonsuz büyüklükte olduğunu düşünmüştür. Ayrıca yıldızların sonsuz yakıta sahip olduklarını, bu sebeple sonsuza kadar bulundukları enerjide kalmaya devam ettiklerine inanmışlardır. Kabul edilen bu işleyiş zamanın en güçlü paradokslarından birinin doğmasına yol açmıştır: Olbers Paradoksu.

Konuya derinlemesine girmeden önce "paradoks" kelimesinin kökenine değinmekte fayda vardır. Yunanca para (karşı) ve doxa (düşünce) köklerinden türeyen bu kelime "bir şeyin aynı anda hem doğru hem de yanlış olabilmesi" çıkmazını ifade eder. "Verdiğim bu örnek yanlıştır" cümlesi de bu mantıksal çıkmaza verilebilecek klasik bir örnektir.

Yazımızda değineceğimiz Heinrich Wilhelm Matthias Olbers, 1758 yılında Almanya'nın Bremen şehrinde dünyaya gelmiştir. Henüz 22 yaşındayken Göttingen Üniversitesinde tıp eğitimini tamamlamış ve uzun yıllar boyunca hekimlik mesleğini devam ettirmiştir. Ancak astronomiye duyduğu merak neticesinde eğitim gördüğü yıllar içerisinde Göttingen Üniversitesinde matematik ve astronomi derslerine de katılmıştır. 1800'lü yılların başında hekimlik mesleğini sürdürürken, aynı zamanda kurucu üyesi olduğu "Celestial Police" yani "Göklerin Polisi" grubunda Mars ile Jüpiter arasında yer alması gerektiği düşünülen "kayıp gezegeni" bulmak amacıyla evinin balkonunda teleskopik gözlemler yapmaya devam etmiştir. Kendi gözlem bölgesini tarayan Olbers, 1802 yılında "Pallas" ve 1807 yılında "Vesta" isimli asteroitleri keşfederek astronomi dünyası için önemli çalışmalarda bulunmuştur. [1]

Olbers, ilk defa 1823 senesinde "eğer evren sonsuz yaşında, homojen dağılmış yıldızlarla dolu ve statik (durağan) ise neden gökyüzü tamamen aydınlık değildir?" sorusunu sormuştur ve bu soru uzun yıllar boyunca bilim dünyasını meşgul etmiştir. Çünkü eğer uzay varsayılan özelliklerde olsaydı her ne kadar uzağa bakarsak bakalım bir yıldızla karşılaşacağımızı; uzak bölgelerdeki yıldızların ışığının daha sönük olacak olmasına rağmen yıldız sayısının daha fazla olacağından ötürü bu farkın kapanması gerektiği düşünülmüştü. Öklidyen, statik ve sonsuz yaşlı bir evren için:

Yıldız Yoğunluğu = ***n***
Her Yıldızın Ortalama Işınım Gücü = ***L***
Dünya'dan ***r*** Uzaklığında Bulunan Bir Yıldızın Akı Yoğunluğu = f(r) = ***L*** / $4\pi r^2$
(Yıldız akısı, yıldızın birim alanından birim zamanda yayılan ışıma enerjisi miktarıdır. Akı yoğunluğu ise yıldızın birim alandan birim dalga boyu başına yaydığı ışıma enerjisidir) olacak şekilde gözlemciden merkezli r yarıçaplı dr kalınlığındaki kabuğun hacmi:
$dV = 4\pi r^2 dr$ olur. Dünya merkezli "r" yarıçapındaki bir kürenin yüzey alanını, dr gibi çok ince bir kabuk kalınlığıyla çarparak o kabuğun **hacmini** hesaplarız. Toplam hacmin yıldız yoğunluğu ile çarpımı vasıtasıyla toplam yıldız sayısını buluruz. Evren sonsuz kabul edildiği için, başlangıç noktasından sonsuza kadar tüm eş merkezli kabuklar tarafından gönderilen toplam akıyı hesaplamak için integral almak bize

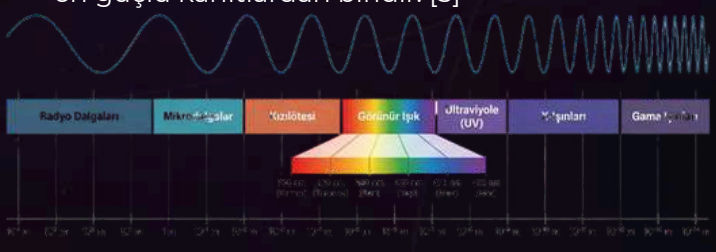
$\int_0^\infty nLdr = \infty$ sonucunu verir.

Yani gökyüzü gerçekten de aydınlık olmalıdır.

İlk olarak o zaman bilinenin aksine evren sonsuz yaşta değildir. Bu, gökyüzünün karanlık olma sebebine dair en güçlü veridir. 1927 yılında Georges Lemaître, Einstein'in Genel Görelilik denklemlerini kullanarak evrenin sonsuz yaşta olmayacağını teorik olarak öne sürmüştür. 1931 senesinde ise İlkel Atom Teorisi ile evrenin sıcak ve yoğun bir başlangıcı olacağı fikri ile Büyük Patlama (Big Bang) teorisinin temelini oluşturmuştur. [2] 1965 senesinde Arno Penzias ve Robert Wilson "Kozmik Mikrodalga Arkaplan Işıması" keşifleri sayesinde evrenin gerçekten de bir yaşı olduğunu ve başlangıcının belli bir zaman önceye dayandığını destekleyecek çok büyük veriler elde etmişlerdir. [3] Bu veriler ışığında NASA'nın WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) ekibi ve ESA (European Space Agency) Planck Araştırma grubundaki bilim insanları evrenin yaklaşık 13,8 milyar yaşında olduğunu hesaplamıştır. [4] Işık hızı (c) ve evrenin bilinen yaşı (t) ise bizim gözlemleyebileceğimiz maksimum mesafe (R) R = ct bağıntısı ile ile sınırlıdır. Yani bağıntımızda üst sınır sonsuz değil, "ct" bulunur. Yani ışık akısı sonsuz değildir.

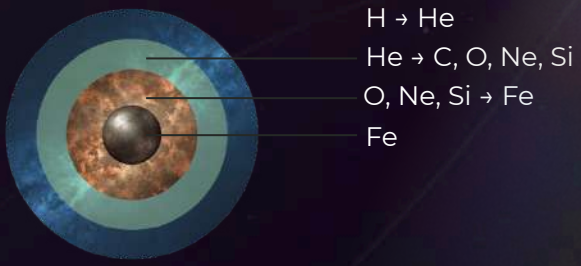
> Kozmolojik Not: Bu, genişleme hesaba katılmayan basit bir yaklaşımdır. Genişleme hesaba katıldığında gözlemlenebilir evrenin yarıçapı yaklaşık 46 milyar ışık yılıdır. Sonuç değişmez, ışığın katedebileceği mesafe yine sonludur.

İkinci olarak da bilinenin aksine evren statik değildir. 1912 senesinde Vesto Slipher, uzak galaksilerden gelen ışık tayflarındaki çizgilerin beklenilenden daha uzun dalgaboylarına sahip olduğunu gözlemlemiştir. Edwin Hubble ise 1929 senesinde bu kaymanın uzaklıkla orantılı arttığını keşfetmiştir. Galaksilerin tayf çizgilerindeki bu kırmızıya kayma bizim klasik hayatta gözlemlediğimiz "Doppler Etkisi'nden" biraz daha spesifik bir olaydır. Klasik dünyadaki bir gözlemci için örneğin bir ses dalgasının dalgaboyunun değişim içerisinde olmasının sebebi, gözlemci ile ses kaynağının birbirlerine göre bağıl hareketleridir. Ancak gök cisimleri için gözlemlediğimiz bu redshift, cisimlerin bizden uzaklaşıyor olması neticesiyle değil; uzayın genişlerken ışığı bir lastik gibi sündürüyor olmasından kaynaklanır. Bu sayede kırmızıya kayma (redshift) gerçekleşir. (Bunu daha iyi anlayabilmek adına görünür ışık tayfı içerisinde dalgaboyu en büyük olan ışığın kırmızı ışık olduğunu hatırlamakta fayda vardır). Bu gözlemler evrenin durağan olmadığına dair en güçlü kanıtlardan biridir. [5]



Son olarak, geçmişteki yaygın varsayımların aksine yıldızların ömrü sonsuz değildir. 1925 yılında Cecilia Payne-Gaposchkin, doktora tezinde yıldızların spektrumlarındaki karmaşık tayf çizgilerinin sıcaklığa bağlı iyonlaşma derecelerinden kaynaklandığını ve yıldızların çok büyük bir oranda helyum ve hidrojenden oluştuğunu keşfetmiştir. Yıldızların kütleçekimleri yıldızları kendi içlerine çökmeye zorlar. Yıldızlar yaptıkları hidrojen-helyum dönüşümleri (nükleer füzyon) vasıtasıyla hidrojen yakıtları tükenene kadar bu etkiye göğüs gererek hayatta kalabilirler. Çünkü füzyon tepkimeleri sonucunda açığa çıkan devasa enerji, dışarıya doğru çok kuvvetli termal basınç ve radyasyon basıncı yaratır. Ancak hidrojen yakıtları tükendiği zaman yıldızlar önce başka evrelerden geçer. Son durum, yıldızın başlangıç kütlesine bağlıdır. Kütleleri ölçeğinde beyaz cüce, nötron yıldızı veyahut bir karadeliğe dönüşerek evrimlerini sonlandırırlar. [6]

Yıldızların çekirdeğinde hafiften ağıra doğru gerçekleşen nükleosentez (element dönüşümü) tepkimeleri sırasıyla Hidrojen → Helyum → Karbon → Neon → Oksijen → Silisyum → Demir seyrini izlemektedir. Ancak demir üretimiyle birlikte enerji üreten füzyon sona erer çünkü demir etkileşimleri enerji üreten değil, tüketen bir etkileşimdir. [7]



Evrenin erken zamanlarında "ölen" bu yıldızların ışığının bize ulaşması milyarlarca yıl sürmektedir.

İşte meraklı bilim insanları ve tutkuyla sürdürdükleri çalışmalarının sonuçları sayesinde artık evrenimizin neden sürekli aydınlık olmadığı paradoksunu cevaplandırabilmekteyiz. Kim bilir, evrende doğasını yanlış bildiğimiz ne çok bulgu vardır! Bilim her zaman "neden" sorusunu sormaya ve kendini sorgulamaya bu yüzden devam etmelidir.

[1] The Editors of Encyclopaedia Britannica. (2026, October 7). Wilhelm Olbers. Encyclopaedia Britannica.
[2] Lemaître, 1927, Annales de la Société Scientifique de Bruxelles
[3] European Space Agency. (t.y.). Cosmic microwave background (CMB) radiation. https://www.esa.int/Science_Exploration/Space_Science/Cosmic_Microwave_Background_CMB_radiation
[4] National Aeronautics and Space Administration (NASA). WMAP overview. https://science.nasa.gov/mission/wmap/wmap-overview/
(Planck Collaboration, 2020, Astronomy & Astrophysics, 641, A6)
[5] National Aeronautics and Space Administration. (2024, September 17). Hubble cosmological redshift.
[6] Wolbach Library. Education and doctoral thesis. Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics. https://library.cfa.harvard.edu/cecilia-payne-gaposchkin/education-and-doctoral-thesis
[7] Fraknoi, A., Morrison, D., & Wolff, S. C. (2022). 22.5 The evolution of more massive stars. In Astronomy 2e. OpenStax. https://openstax.org/books/astronomy-2e/pages/22-5-the-evolution-of-more-massive-stars

GÖRÜNMEYEN BİR GALAKSİYİ NASIL TARTARIZ?

HİLAL EVİN
ANKARA ÜNİVERSİTESİ ASTRONOMİ VE UZAY BİLİMLERİ BÖLÜMÜ

HAKEM
PROF. SELİM SELAM

EDİTÖR
YFD YAYIN KURULU

"Bilinmeyenin kıyılarında tuhaf bir iz bulduk. Kökenini açıklamak için derin teoriler geliştirdik. Sonunda, o izi bırakan şeyi yeniden kurmayı başardık."

—Arthur S. Eddington, Space, Time and Gravitation (1921)

ANDROMEDA GALAKSİSİ

ÖZET

Bir galaksinin kütlesini belirlemek için içerdiği bütün yıldızları ve gaz bulutlarını tek tek gözlemlemek mümkün değildir. Üstelik galaksilerin kütle dağılımını yalnızca ışıklarından hareketle açıklamak, gözlenen dinamik davranışları anlamak için çoğu zaman yeterli olmaz. Bu yazıda galaktik dönme eğrilerinden yararlanılarak görünmeyen kütlenin nasıl araştırıldığı ele alınmaktadır. Newton kütleçekim yasası ve dairesel yörünge yaklaşımından yola çıkılarak yörünge hızı ile içerilen kütle arasındaki ilişki türetilmekte, Kepler tipi dönme beklentisi ile gözlenen yaklaşık düz dönme eğrileri karşılaştırılmaktadır. Son olarak bu gözlemlerin karanlık madde halosu fikrini nasıl desteklediği ve söz konusu çıkarımın sınırları tartışılmaktadır.



PİNWEEL GALAKSİ

EVRENİN GÖRÜNMEYEN KÜTLESİ


ORİON BULUTSUSU

Gökyüzüne baktığımızda yıldızları, parlak bulutsuları ve galaksilerin ışıldayan yapılarını görürüz. Bu görüntü, evrenin maddesel içeriğini anlamak için ilk başvurduğumuz kaynaktır. Ancak bir cismin ışık yayması ile kütleye sahip olması aynı şey değildir. Işık yaymayan veya ışığı gözlem araçlarımızla doğrudan tespit edilemeyen bir madde de kütleçekimsel etkiler yaratabilir.

Astrofiziğin temel sorularından biri bu noktada ortaya çıkar: Bir galaksinin içerdiği bütün maddeyi göremiyorsak toplam kütlesini nasıl belirleyebiliriz?

Bu sorunun yanıtı, yalnızca ışığın ölçülmesinde değil, ışık yayan cisimlerin nasıl hareket ettiğinin incelenmesinde yatar. Yıldızların ve gaz bulutlarının galaksi içerisindeki hızları, onları etkileyen kütleçekim alanı hakkında bilgi verir. Böylece görünür maddenin ötesindeki kütle dağılımı, doğrudan görüntülenmese bile hareketler üzerindeki etkisi aracılığıyla araştırılabilir.

Galaktik dönme eğrileri, bu yaklaşımın en önemli örneklerinden biridir. Bir galaksideki yıldızların ve gazın yörünge hızları galaksi merkezine olan uzaklıklarına göre çizildiğinde gözlemler basit modellerin öngörülerinden önemli ölçüde farklılaşabilir. Bu uyuşmazlık, modern astrofizikte karanlık madde kavramının gelişmesinde belirleyici rol oynamıştır.


ETA CARİNAE BULUTSUSU

“Evrenin kütleçekiminin yaklaşık yüzde 85'inin kaynağı, geliştirdiğimiz bütün gözlem yöntemlerine rağmen hâlâ saptayamadığımız gizemli bir şeydir.”

“–Neil deGrasse Tyson

Death by Black Hole and Other Cosmic Quandaries

NEWTON MEKANİĞİ VE DAİRESEL YÖRÜNGELER

Galaktik dönme eğrilerinin fiziksel anlamını kavramak için öncelikle Newtonyen kütleçekim yasasına başvurabiliriz. Newton'un evrensel kütleçekim yasasına göre, kütleleri M ve m olan iki cisim arasındaki uzaklık r ise aralarındaki kütleçekim kuvvetinin büyüklüğü

$$F_{\text{çekim}} = \frac{GMm}{r^2}$$

şeklinde ifade edilir. Burada G, evrensel kütleçekim sabitidir. Şimdi galaksi merkezinden r uzaklıkta, yaklaşık dairesel bir yörüngede hareket eden kütlesi m olan bir yıldız düşünelim. Yıldızın yörünge hızı v(r) ile gösterilsin. Dairesel hareketin sürmesi için gerekli merkezcil kuvvet

$$F_{\text{merkezcil}} = \frac{mv(r)^2}{r}$$

olur.
Kütleçekiminin dairesel hareketi sağlayan baskın kuvvet olduğunu varsayarsak merkezcil ve çekim kuvvetleri birbirine eşitlenebilir. Küresel simetrik bir kütle dağılımında, yarıçapı r olan kürenin içinde kalan toplam kütleyi M(< r) ile gösterirsek

$$\frac{GM(<r)m}{r^2} = \frac{mv(r)^2}{r}$$

bağıntısını elde ederiz. Her iki taraftaki yıldız kütlesi m sadeleştirilip denklem yeniden düzenlendiğinde

$$v(r)^2 = \frac{GM(<r)}{r}$$

ve dolayısıyla

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM(<r)}{r}}$$

bulunur.

Bu bağıntı, galaktik dönme eğrilerinin yorumlanmasında temel bir başlangıç noktasıdır. Burada v(r), yıldızın yörünge hızını; M(< r), yarıçapı r olan bölgenin içerisinde kalan toplam kütleyi; r ise galaksi merkezine olan uzaklığı ifade eder.

Bununla birlikte, hız bağıntısı bütün galaksiler için geometriden bağımsız, eksiksiz bir model değildir. Bağıntının bu biçimi küresel simetri varsayımına dayanır. Gerçek galaksilerde yıldızların önemli bir kısmı yassı bir disk içerisinde bulunur. Bu nedenle disk geometrisinin kütleçekim alanına katkısı, ayrıntılı modellerde ayrıca hesaba katılmalıdır. Yine de söz konusu bağıntı, gözlenen hızların neden kütle dağılımı hakkında bilgi taşıdığını göstermesi bakımından son derece kullanışlıdır.



TRIANGULUM GALAKSİSİ

KEPLERIAN BEKLENTİ: HIZ NEDEN AZALMALIDIR?

Güneş Sistemi'nde gezegenlerin yörünge hareketleri, merkezî kütlenin baskın olduğu bir sistem için önemli bir örnektir. Bir gezegenin Güneş'e uzaklığı arttıkça yörünge hızı genel olarak azalır. Bunun nedeni, Güneş'in kütlesinin gezegenlerin yörüngelerinin içerisinde kalan toplam kütleye büyük ölçüde hâkim olmasıdır. Benzer bir düşünceyi galaksilere uygulayalım. Galaksinin kütlesinin neredeyse tamamının merkezî bölgede toplandığını ve yeterince büyük yarıçaplarda içerilen kütlenin yaklaşık sabit kaldığını varsayalım:

$$M(<r) \approx M_0$$

burada M_0 , içerilen kütlenin yaklaşık sabit değeridir. Hız eşitliği bu durumda

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM_0}{r}}$$

biçimine dönüşür. Dolayısıyla

$$v(r) \propto r^{-1/2}$$

ilişkisi elde edilir.
Bu, Keplerian hız düşüşüdür. Merkezden uzaklaştıkça yörünge hızının azalması beklenir. Ancak burada önemli bir ayrıntı vardır: Bu sonuç, içerilen kütlenin uzaklıkla yaklaşık sabit kaldığı varsayımına bağlıdır. Bir galaksinin bütün kütlesinin merkezde toplanmış olması gerekmez; galaksinin dış bölgelerinde kütle artmaya devam ediyorsa hızın davranışı da değişebilir. İşte gözlemlerle kuramsal beklenti arasındaki fark, bu varsayımın yeniden değerlendirilmesini gerektirmiştir.

GALAKTİK DÖNME EĞRİLERİ: GÖZLEMLER NE SÖYLÜYOR?

Bir galaksinin dönme eğrisi, yörünge hızının galaksi merkezine olan uzaklıkla nasıl değiştiğini gösteren grafiktir. Yatay eksende merkezden uzaklık r, düşey eksende ise yörünge hızı v(r) bulunur.

Bu hızlar çeşitli gözlemsel yöntemlerle belirlenebilir. Gazın tayf çizgileri ve yıldızların tayfları, hareket nedeniyle Doppler kaymasına uğrar. Gözlem doğrultusunda bize yaklaşan bölgelerde çizgiler daha kısa dalga boylarına, uzaklaşan bölgelerde ise daha uzun dalga boylarına kayar. Bu kaymalar ölçülerek görüş doğrultusundaki hız bileşeni hesaplanabilir. Galaksinin eğimi ve geometrisi de dikkate alındığında dönme hareketi hakkında bilgi edinilir.

Nötr hidrojenin yaklaşık 21 santimetrelik radyo çizgisi de bu ölçümlerde önemli bir araçtır. Hidrojenin hiperince enerji düzeyleri arasındaki geçişten kaynaklanan bu çizginin gözlenen frekansı, gazın hareketi hakkında bilgi taşır. Özellikle optik ışıkta sönük olan dış galaktik bölgelerde nötr hidrojen gözlemleri, dönme eğrisinin daha büyük yarıçaplara kadar izlenmesine yardımcı olabilir (Sofue ve Rubin, 2001).

Vera Rubin, Kent Ford ve çalışma arkadaşlarının galaksilerin dönme hareketleri üzerine yaptığı ölçümler, bu alandaki önemli tarihsel katkılardandır. Gözlenen dönme eğrilerinin dış bölgelerde basit Keplerian beklentiye uygun biçimde düşmemesi, görünür maddenin kütleçekimsel etkilerinin tek başına yeterli olup olmadığı sorusunu gündeme taşımıştır (Rubin vd., 1980). Birçok sarmal galakside, merkezî bölgelerden uzaklaşıldığında hızın bir süre arttığı ve ardından geniş bir yarıçap aralığında yaklaşık sabit kaldığı görülür. Bu davranış, düz veya yaklaşık düz dönme eğrisi olarak adlandırılır.

DÜZ DÖNME EĞRİLERİNDEN KARANLIK MADDEYE

Gözlenen yörünge hızı dış bölgelerde yaklaşık sabitse

$$v(r) \approx v_0$$

burada v_0 yarıçap boyunca yaklaşık değişmeyen hızdır. Hız denkleminden, küresel simetri yaklaşımı altında içerilen kütle için

$$M(< r) = v(r)^2 r/G$$

sonucu elde edilir.
Hız yaklaşık sabit olduğunda,

$$M(< r) \propto r$$

ilişkisi ortaya çıkar.
Başka bir deyişle, dönme hızı dış bölgelerde sabit kalıyorsa yarıçap arttıkça içerilen kütlenin de artması gerekir. Eğer görünür yıldızlar ve gaz, bu artışı açıklamaya yetmiyorsa galaksinin kütle dağılımında ışıkla doğrudan izlenemeyen ek bir bileşen bulunması olasıdır. Bu çıkarım, karanlık madde halosu fikrinin temel dayanaklarından biridir.

Karanlık madde, elektromanyetik ışınımı yaymayan, soğurmayan veya saçmayan; buna karşın kütleçekimsel etkileriyle varlığına ilişkin kanıtlar elde edilen bir madde bileşeni olarak tanımlanır. Galaksilerin, ışıldayan disklerinin çok ötesine uzanan geniş karanlık madde halolarıyla çevrili olduğu düşünülmektedir.



TRIFID NEBULA

Yaklaşık düz dönme eğrisi ile kütle yoğunluğu arasındaki ilişki de dikkat çekicidir. Küresel simetrik bir modelde, yarıçapı r olan kürenin içerisinde kalan kütle

$$M(< r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \overline{\rho}(r)$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki $\overline{\rho}(r)$, yarıçapı r olan kürenin içindeki ortalama yoğunluktur. Eğer M(< r) ∝ r ise ortalama yoğunluk

$$\overline{\rho}(r) \propto r^{-2}$$

olarak değişir. Yerel yoğunluk için de aynı ölçeklenme, küresel simetri altında geçerli olan

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dM(< r)}{dr}$$

bağıntısından elde edilebilir. M(< r) ∝ r olduğunda

$$\rho(r) \propto r^{-2}$$

onucuna ulaşılır.

Bu, idealize edilmiş bir halonun dış bölgelerdeki yaklaşık davranışını gösterir; gerçek karanlık madde halolarının yoğunluk profilleri daha karmaşık olabilir ve bu basit model bütün yarıçaplarda geçerli değildir. Bununla birlikte, bilimsel çıkarımın sınırlarını korumak önemlidir. Tek bir galaksinin dönme eğrisi, tek başına bütün alternatif kütleçekim açıklamalarını matematiksel olarak dışlamaz. Galaksilerin kütle dağılımları, gazın hareketleri, yıldızların ışık dağılımı ve diğer bağımsız gözlemler birlikte değerlendirilmelidir.
Karanlık madde, kozmolojik ölçekteki çok sayıda gözlemle desteklenen güçlü bir açıklamadır; ancak karanlık madde parçacıklarının mikrofiziksel doğası henüz kesin olarak belirlenmiş değildir.

SONUÇ: KÜTLE ÇEKİMİNİN TERAZİSİ

Galaksilerin kütlesini belirlemek, yalnızca yaydıkları ışığı ölçmekten ibaret değildir. Yıldızların ve gazın hareketleri, kütleçekim alanının yapısını ortaya koyan birer gözlemsel araçtır. Newtonyen mekaniğin dairesel yörünge yaklaşımından elde edilen

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM(<r)}{r}}$$

bağıntısı, ölçülen hızların içerilen kütleyle nasıl ilişkilendirilebileceğini gösterir. Keplerian hız düşüşü beklentisiyle birçok galakside gözlenen yaklaşık düz dönme eğrileri arasındaki fark ise görünür maddenin ötesindeki kütle dağılımını araştırmaya yöneltir. James Webb Uzay Teleskobu gibi yeni nesil gözlemevleri, erken evrendeki galaksileri ve galaksi oluşum süreçlerini inceleyerek bu yapıların nasıl ortaya çıktığına ilişkin modellerin sınanmasına katkıda bulunmaktadır. Bununla birlikte, karanlık maddeyi doğrudan görüntülemekle galaksilerin oluşumunu gözlemlemek aynı şey değildir. Bu gözlemler, karanlık maddenin doğasına ve kozmik yapıların evrimine ilişkin modelleri sınamak için tamamlayıcı veriler sağlar. Sonuç olarak astrofizikçiler, görünmeyen bir galaksiyi tartarken ışığın kendisinden çok, ışık yayan cisimlerin hareketlerini ve bu hareketlerin altında yatan kütleçekim alanını inceler. Galaktik dönme eğrileri, görünür olan ile kütleçekimsel olarak var olan arasındaki farkı ortaya koyarak evrenin henüz çözülememiş temel sorularından birine işaret eder.

KAYNAKLAR

Bertone, G., Hooper, D., & Silk, J. (2005). Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints. Physics Reports, 405(5–6), 279–390. https://doi.org/10.1016/j.physrep.2004.08.031

Binney, J., & Tremaine, S. (2008). Galactic dynamics (2nd ed.). Princeton University Press.

Rubin, V. C., Ford, W. K., Jr., & Thonnard, N. (1980). Rotational properties of 21 Sc galaxies with a large range of luminosities and radii, from NGC 4605 (R = 4 kpc) to UGC 2885 (R = 122 kpc). The Astrophysical Journal, 238, 471–487. https://doi.org/10.1086/158003

Sofue, Y., & Rubin, V. (2001). Rotation curves of spiral galaxies. Annual Review of Astronomy and

Astrophysics, 39, 137–174. https://doi.org/10.1146/annurev.astro.39.1.137


LAGOON NEBULA

*Bu yazıda kullanılan görseller Hilal Evin tarafından Slooh platformu üzerinden çekilmiştir.

NOETHER TEOREMİ VE KORUNUMLU BÜYÜKLÜKLER

S. METE GÖKTAŞ

HAKEM
PROF. DEVRİM YAZICI

EDİTÖR
YFD YAYIN KURULU

EMMY NOETHER

Amalie Emmy Noether (1882–1935), soyut cebir üzerine yaptığı devrimsel çalışmalarla 20. yüzyıl matematiğinin aksiyomatik yapısını tek başına yeniden inşa etmiştir. Ancak onun dehası saf matematik sınırlarında kalmamış, 1918 yılında yayımladığı "Invariante Variationsprobleme" başlıklı makalesiyle [1] teorik fiziğin gidişatını geri dönülemez biçimde değiştirmiştir. Literatüre "Noether Teoremi" olarak geçen bu matematiksel yapı, fiziksel korunum yasalarının (enerji, yük, momentum, açısal momentum) deneysel tesadüfler olmanın aksine, evrenin sahip olduğu sürekli simetrilerinin kaçınılmaz geometrik sonuçları olduğunu kanıtlamıştır [2]. Albert Einstein'ın "kadınların yükseköğretime kabulünden bu yana yetişmiş en büyük yaratıcı matematik dehası" [3] olarak tanımladığı Noether'in çalışmaları, modern teorik fiziğin temelini oluşturmuştur.

NOETHER'İN HAYATI

Amalie Emmy Noether, 1882 yılında Erlangen'de, cebirsel geometrinin kurucularından kabul edilen Max Noether'in kızı olarak dünyaya geldi. Ancak dönemin Almanya'sında akademik sistem, kadınların yükseköğretimdeki yerini destekleyecek bir mimariye sahip değildi. Üniversiteye resmî kaydı reddedildiği için, matematik derslerine ancak dinleyici statüsünde ve profesörlerin özel izniyle katılabildi [4].

1907 yılında, "İnvaryant Teorisinin Kralı" olarak bilinen Paul Gordan'ın danışmanlığında üçlü bikuadratik formlar üzerine doktorasını tamamladı. Ancak geometrik zarafete olan takıntısı öylesine yüksekti ki salt algoritmik hesaplamalara dayanan kendi doktora tezini yıllar sonra "çöplük" (Mist / formül yığını) olarak nitelendirecekti [7]. Doktora sonrasında Erlangen Matematik Enstitüsünde yedi yıl boyunca, hiçbir resmî ünvanı olmadan ve tamamen ücretsiz çalıştı [4]. Babası hastalandığında onun derslerine girdi ve akademik üretimine arka planda, sistemin dışında devam etti.

Fizik tarihini değiştiren kırılma noktası ise 1915 yılında yaşandı. David Hilbert ve Felix Klein, Albert Einstein'ın yepyeni Genel Görelilik teorisinde devasa bir matematiksel açık tespit etmişlerdi: Eğri uzay-zamanda enerjinin küresel korunumu sağlanamıyordu.

Bu sorunu çözmesi için Hilbert ve Klein, dönemin en yetkin invaryant teorisyeni olan Noether'i Göttingen Üniversitesine davet etti [2]. Noether, 1918 yılında yayımladığı teoremi ile hem genel rölativitedeki sorunu çözdü hem de korunum yasalarının eylemin simetrilerinin sonucu olduğunu gösterdi.

Ancak Noether'in Genel Görelilik gibi devasa bir problemi çözmüş olmasına rağmen, Göttingen yönetimi ona "Privatdozent" (bağımsız eğitmen) ünvanını vermeyi cinsiyeti nedeniyle reddetti. Dönemin bazı profesörleri, senatoda bir kadının bulunmasına şiddetle karşı çıkıyordu. Bu kurumsal yobazlık, Hilbert'in fakülte senatosundaki o meşhur isyanına yol açtı: "Adayın cinsiyetinin onun Privatdozent olabilmesine bir engel teşkil ettiğini anlamıyorum. Ne de olsa burası bir üniversite, hamam değil" [5].
Bu reddin ardından Noether, derslerini yıllarca Hilbert'in adı altında maaşsız bir şekilde vermek zorunda kaldı.
1920'lerde Noether ağırlıklı olarak soyut matematiğe yönelmiş ve etrafında toplanan parlak öğrencilerle bu alanı yeniden şekillendirmiştir [6]. 1933'te Almanya'dan ayrılmak zorunda kaldığında Einstein ve Weyl'in yardımlarıyla Amerika'daki Bryn Mawr College'a geçmiş ve hayatının son 18 ayını nihayet hak ettiği akademik saygıyı görerek geçirmiştir [7].

"Yaşayan en yetkin matematikçilerin ortak kanısına göre Matmazel Noether, kadınların yükseköğretime kabulünden bu yana yetişmiş en mühim yaratıcı matematik dehasıydı. Yüzyıllar boyunca en yetenekli matematikçilerin meşgul olduğu cebir alanında o; bugünün genç matematikçi neslinin gelişiminde muazzam bir öneme sahip olduğu kanıtlanmış yöntemler keşfetmiştir."

— A. Einstein, The New York Times'a mektubundan alıntı

"Haklı bir gurur, zira siz büyük bir kadın matematikçiydiniz — sizi tarihin tanıdığı en büyüğü olarak adlandırmakta hiçbir çekince duymuyorum."

— H. Weyl, Noether'in cenaze törenindeki konuşmasından bir parça



NOETHER TEOREMİ

Noether teoremi temel olarak, bir fiziksel sistemin eylemindeki sürekli ve sonsuz küçük her simetrinin, o simetriye karşılık gelen bir korunumlu yük üreteceğini ifade eder. Teorem, bu yükü bulmak için eyleme bir simetri dönüşümü uygulayıp varyasyonu iki farklı yolla (simetrik ve on-shell) hesaplayarak elde edilen terimleri eşitler [8].
İlk durumda, sistemin hareket denklemlerini sağlaması şartı koşulmadan, doğrudan eyleme bir simetri dönüşümü uygulanır. Bu dönüşüm eylemin gerçekten bir simetrisi ise Lagrange fonksiyonunun varyasyonu bir tam zaman türevine indirgenir ve eylemin varyasyonu yalnızca bir sınır terimi verir.

$$\delta I_{\text{simetrik}} = \int dt \frac{dK}{dt} \qquad \delta L = \frac{dK}{dt}$$

İlkinci adımda ise spesifik simetri dönüşümlerini kullanmaktan ziyade genel varyasyon hesabı yapılır. Sistemin fiziksel yörüngede olduğu (on-shell) varsayılarak Euler-Lagrange (E-L) denklemleri izole edilir. Standart bir eylemin varyasyon

$$\delta I = \int \delta L \, dt = \int dt \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i \right)$$

şeklindedir. Bu ifadeye kısmî integrasyon uygulanırsa

$$\delta I = \underbrace{\int dt \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right) \delta q^i}_{\text{E-L denklemleri}} + \underbrace{\int dt \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right)}_{\text{Sınır değeri}}$$

elde edilir.

Fiziksel yörüngeler (on-shell koordinatlar, yani eylemi ekstremum yapan gerçek hareket yörüngeleri) için Euler-Lagrange denklemleri sağlanacağından ilk terim kaybolur ve geriye yalnızca sınır terimi kalır.

$$\delta I_{\text{on-shell}} = \delta I_{\text{simetrik}}$$

$$\int dt \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right) = \int dt \frac{dK}{dt}$$

Bu iki varyasyon ifadesi on-shell koşulu altında birbirine eşitlenirse integrandlar karşılıklı olarak birbirine eşitlenip türevler tek bir tam türev altında birleştirildiğinde ve kanonik momentum tanımı kullanıldığında

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \qquad \frac{d}{dt}\left(p_i \delta q^i - K \right) = 0$$

ifadesine ulaşılır. Buradan parantez içindeki ifadenin zamanla değişmediği görülür ve korunan Noether yükü

$$Q = p_i \delta q^i - K$$

olarak elde edilir.

DOĞRUSAL MOMENTUMUN KORUNUMU VE KUVVET

Sir Isaac Newton; Galileo, Kepler ve Descartes'ın yaptığı çalışmalara dayanarak klasik fiziğin kurucu metni olan Principia'da ikinci hareket yasasını şu cümleyle formüle etmiştir: “Hareketin değişimi, uygulanan itici kuvvet ile daima orantılıdır ve bu kuvvetin uygulandığı düz çizgi yönünde gerçekleşir” [10]. Burada hareketin değişiminden kastı Descartes'ın momentum tanımına dayanmaktadır. Newton, bu yasayı daha derin bir ilkeden matematiksel olarak ispat etmektense doğanın bir aksiyomu olarak kabul etmiştir.
Noether teoremi açısından ise momentumun korunumu bir aksiyom değil, uzaysal öteleme simetrisinin zorunlu bir sonucudur. Matematiksel olarak, tek boyutlu (1D) bir parçacık için eylem integrali

$$I[q] = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q) \right) dt$$

olarak tanımlanır.

Burada $L = T - V$ olarak verildiğinde konuma bağlı potansiyel terim sebebiyle parçacığa bir kuvvet etki edeceğini ve momentumun korunmayacağını öngörebiliriz. Bunu Noether teoremi ile açıkça göstermek adına, sisteme sonsuz küçük sabit bir uzaysal öteleme dönüşümü

$$q \to q' = q + \epsilon \qquad \delta q = \epsilon$$

uygulayarak eylemdeki fonksiyonel varyasyonu hesaplayalım:

$$\delta I[q] = I[q + \delta q] - I[q]$$

Sabit öteleme altında kinetik terimin değişimi doğrudan sıfırdır $\delta T \equiv 0$ Öteleme simetrisini kıran, yani momentum korunumunu bozan potansiyel terimin varyasyonu ise

$$\delta V = \frac{dV}{dq}\delta q = \frac{dV}{dq}\epsilon.$$

olup eylemin toplam varyasyonu

$$\delta I = -\int \frac{dV}{dq}\epsilon\, dt$$

şeklindedir. Görüldüğü üzere bu ifade zamanın bir tam türevi olarak yazılamadığı için sistemdeki toplam momentum korunmaz. Ancak Noether teoremi, simetrinin kırıldığı bu durumda dahi momentumdaki değişimin kaynağını açıkça ortaya koyar.

Lagrange fonksiyonunun değişimini sınır terimiyle ilişkilendirirsek:

$$\frac{dK}{dt} = \delta L = -\frac{dV}{dq}\epsilon \implies K = -\int \frac{dV}{dq}\epsilon\, dt$$

Buradan Noether bağıntısını uygularsak:

$$\frac{d}{dt}(p\delta q - K) = 0$$

$$\frac{dp}{dt}\epsilon = \frac{dK}{dt} = -\frac{d}{dt}\int \frac{dV}{dq}\epsilon\, dt$$

Kuvvet tanımını yerine yazarsak

$$F = -\frac{dV}{dq}$$

$$\frac{dp}{dt}\epsilon = \epsilon\frac{d}{dt}\int F\, dt \implies \frac{dp}{dt} = F$$

olduğu matematiksel olarak kanıtlanır. Dolayısıyla sistemde öteleme simetrisini kıran herhangi bir dış kuvvet F yoksa toplam doğrusal momentum mutlak suretle korunur.

AÇISAL MOMENTUMUN KORUNUMU VE TORK

Üç boyutlu bir sistemin eyleminde tek yönlü sabit bir dış alan tanımlanırsa eylemin SO(3) dönme simetrisi kırılır ve genel dönme dönüşümleri altında eylem sabit kalmaz. Ancak bir önceki örnekte olduğu gibi, simetri kırılmasının yarattığı dinamik etki doğrudan varyasyon denkleminin içinden okunabilir [8]. Böyle bir sistem için örnek bir eylem yazarsak:

$$I_B[x(t), y(t), z(t)] = \int \left[\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - Bz(t)\right] dt$$

Vektörel notasyona geçer ve sabit dış alanı

$$\vec{B} \equiv B\hat{z}$$

olarak tanımlarsak aynı eylemi daha kompakt bir formda elde ederiz:

$$I_{\vec{B}}[\vec{r}(t)] = \int \left[\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - \vec{B}\cdot\vec{r}\right] dt$$

Dönme simetrisinin kırılmasını analiz etmek için eylemdeki hem konum vektörüne hem de arka plan alanına sonsuz küçük bir üç boyutlu döndürme dönüşümü uygulayalım:

$$\vec{r} \to \vec{r}' = R\vec{r}$$

$$\delta_s\vec{r} = \vec{\alpha}\times\vec{r}, \qquad \delta_s\vec{B} = \vec{\alpha}\times\vec{B}$$

Her iki vektör de aynı açı ile döndürüldüğü için skaler çarpımın varyasyonu özdeş olarak sıfırlanır:

$$\delta_s(\vec{B}\cdot\vec{r}) = (\vec{\alpha}\times\vec{B})\ \ \vec{r} + \vec{B}\cdot(\vec{\alpha}\times\vec{r}) = \vec{\alpha}\cdot(\vec{B}\times\vec{r}) - \vec{\alpha}\ \ (\vec{B}\times\vec{r}) = 0,$$

Dolayısıyla $\delta_s I_{\vec{B}} = 0$ olur.

Aynı varyasyon hesabını kısmî integrasyon uygulayarak açık formda yazarsak:

$$\int \left[\underbrace{\left(-m\ddot{\vec{r}} - \vec{B}\right) \cdot \delta_s \vec{r}}_{\text{E-L denklemleri } (=0)} + \underbrace{\frac{d}{dt}\left(m\dot{\vec{r}}\ \ \delta_s \vec{r}\right)}_{\text{Sınır değeri}} - \underbrace{\delta_s \vec{B}\ \ \vec{r}}_{\text{Alan varyasyonu}} \right] dt = 0$$

On-shell koordinatlarda E-L terimi sıfırlanır. Kalan terimlerde simetri dönüşümlerini açıp skaler üçlü çarpımın döngüsel özelliğinden

$$m\dot{\vec{r}} \cdot (\vec{\alpha} \times \vec{r}) = \vec{\alpha} \cdot (m\vec{r} \times \dot{\vec{r}})$$

ve açısal momentumun

$$\vec{L} = m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})$$

tanımından yararlanırsak:

$$\int \vec{\alpha} \cdot \left(\frac{d\vec{L}}{dt} + \vec{r} \times \vec{B} \right) dt = 0$$

elde ederiz.

Bu integralin herhangi bir dönme için sıfır olmasının tek yolu integrandın sıfıra eşit olmasıdır:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -\vec{r} \times \vec{B}$$

Buradaki -B vektörünü sisteme etki eden genel kuvvet olarak alırsak tork tanımı yardımı ile

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{B} = \vec{\tau}$$

sonucuna ulaşılır; böylece sisteme etkiyen net bir dış tork olmadığı sürece açısal momentumun korunduğu ispatlanmış olur.

ELEKTRİK YÜKÜNÜN KORUNUMU

Noether teoreminin teorik fizikteki asıl devrimi, nokta parçacıklardan ziyade sürekli alanlar üzerinde çalışıldığında ortaya çıkar. İlk iki örnekteki klasik mekanik kurgusunda, eylem integrali yalnızca tek boyutlu bir zaman parametresine (t) bağlı olduğundan işlemler görece basitti. Ancak elektrik yükünün korunumunu ve kozmik ölçekte enerji dinamiğini incelemek için parçacık dinamiğini terk edip Noether mekanizmasını doğrudan alanlara uygulamak gerekir. Alan teorilerinde Noether teoremi, doğrudan korunumlu bir skaler yük vermek yerine uzay-zamana yayılan korunumlu bir 4-akım üretir $\partial_\mu J^\mu = 0$.

Sistemin toplam korunumlu yükü Q ise bu akımın zaman bileşeninin tüm üç boyutlu fiziksel hacim üzerinden integre edilmesiyle elde edilir:

$$Q = \int J^0 d^3x$$

Elektrik yükünün korunumunu ve ayar yapısını tam anlamıyla türetmek, lokal ayar dönüşümlerini ve Noether'in ikinci teoremini gerektirir. Bu matematiksel altyapı mevcut yazının sınırlarını aşacağından aynı mekanizmayı daha az tehditkâr olan global faz dönüşümleri üzerinde çalıştıracağız.

Global U(1) faz simetrisini incelemek adına, kuantum alan teorisinde rölativistik alan dinamiğinin en sade modellerinden olan kompleks Klein-Gordon alanı ele alınsın. Bu serbest alan için Lagrangian yoğunluğu şu şekildedir:

$$\mathcal{L}_m = \partial_\mu \psi \partial^\mu \psi^* - m^2 \psi \psi^*$$

Bu sisteme uzay-zamandan bağımsız, global bir U(1) faz kayması

$$\psi \to \psi' = e^{i\theta}\psi$$

uygulandığında Lagrangian yoğunluğu değişmez kalır. Noether'in birinci teoremi, bu kırılmamış simetrinin bir sonucu olarak bize doğrudan şu korunumlu 4-akımı verir:

$$j^\mu_{\mathcal{L}_m} = i(\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*$$

[9]'da da belirtildiği gibi, “elde edilen bu (reel) büyüklük, yük ile ilişkilendirmemiz gereken niceliktir”.

Eğer bu faz dönüşümü global bir sabit olmak yerine uzay-zamana bağlı lokal bir karaktere bürünseydi türev operatörü çarpım kuralı gereği serbest Lagrangian'ın simetrisini kıracaktı. Eylemi bu lokal dönüşüm altında da invaryant tutmak için standart türevlerin kovaryant türevlere dönüştürülmesi ve evrene yeni bir ayar alanının (foton) enjekte edilmesi mutlak bir zorunluluk olacaktı.

GENİŞLEYEN EVRENDE ENERJİ

Genel Görelilik çerçevesinde, eğri uzay-zamanda enerjinin global olarak korunabilmesi için sistemin zamanda öteleme simetrisine sahip olması gerekir. Bu simetri, uzay-zamanın zamansal bir Killing vektör alanına sahip olmasını şart koşar. Killing denklemi, metrik tensörün bu vektör yönündeki Lie türevinin sıfır olmasını gerektirir:

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0$$

Bu denklemde yer alan ∇_μ operatörleri, eğri uzay-zamanda tanımlı kovaryant türevleri temsil eder ve türetiliş mekanizmaları [8]'de detaylandırılmıştır.

Fiziksel olarak bu türevler, bir vektörü eğri manifold üzerinde paralel taşırken koordinat bazlarının değişimini dengelemek için eklenen geometrik düzeltme terimlerini içerir.

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0$$

Metrik tensörün bir vektör alanı boyunca alınan Lie türevini sıfıra eşitlemek, uzay-zamanın bu vektör akışı yönünde hiçbir deformasyona uğramadığını, yani manifoldun bu doğrultuda kesin bir izometriye sahip olduğunu gösterir.

$$J^\mu = T^{\mu\nu}\xi_\nu$$

Eğer böyle bir simetri vektörü mevcutsa bu vektör aracılığıyla enerji-momentum tensörü üzerinden korunumlu bir akım elde edilebilir

Ancak kozmolojik ölçekte evrenin dinamiğini tanımlayan Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) metriğine baktığımızda bu simetrinin bizzat uzay-zaman dokusu tarafından kırıldığını görürüz. Düz ve genişleyen uzay-zaman metriğine bakarsak:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j$$

Bu metrikteki kozmolojik ölçek faktörü a(t) zamana açıkça bağlıdır. Evren genişledikçe uzaysal metrik bileşenleri zamanla değiştiğinden FLRW uzay-zamanı zamansal bir Killing vektörü barındıramaz. Zamanda öteleme simetrisinin yokluğu, Noether teoremi gereği enerjinin global korunumunun matematiksel olarak imkânsızlaşması demektir.

Bu simetri kırılımına dair önemli bir istisna elektromanyetik alandır. Elektrodinamik teori konformal simetri grubunu içerir. Bu grup için Killing denklemi, konformal Killing denklemine dönüşür:

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = \frac{1}{2}(\nabla_\lambda \xi^\lambda) g_{\mu\nu}$$

Ancak fotonlar için enerji-momentum tensörünün izsiz oluşu sayesinde, FLRW uzay-zamanında dahi elektromanyetik alan için korunumlu bir akım tanımlanabilir [8].

Genel evren dinamiğine geri dönersek evrenin içeriğini basitlik adına mükemmel bir akışkan olarak modellediğimizde enerji-momentum tensörünün bileşenleri şöyledir:

$$T^0{}_0 = -\rho(x^0), \quad T^i{}_j = P(x^0)\delta^i_j \quad (i,j = 1,2,3)$$

Burada ρ kozmik akışkanın enerji yoğunluğunu, P ise basıncını ifade eder. Genel Göreliliğe göre, enerji-momentum tensörünün kovaryant diverjansı evrensel olarak sıfırdır:

$$\nabla_\mu T^\mu{}_\nu = 0$$

Bu lokal korunum denklemi FLRW metriği için açıldığında

$$H(x^0) := \frac{\dot{a}(x^0)}{a(x^0)}$$

$$\dot{\rho}(x^0) + 3[\rho(x^0) + P(x^0)]H(x^0) = 0$$

elde edilir.

Genel Görelilikte eş hareketli (comoving) bir hacimdeki toplam makroskopik enerji

$$E = -\int d^3x\sqrt{-g}T^0{}_0$$

olarak tanımlanır.

Metriğin determinantı

$$\sqrt{-g} = a^3(x^0)\sqrt{\tilde{g}}$$

olarak ayrıştırılabilir. Burada $\tilde{g}$, zamandan bağımsız uzaysal geometriden gelen hacim faktörüdür ve tüm zaman bağımlılığı 3 boyutlu uzayda $a^3(x^0)$ çarpanının içine hapsedilmiştir. Toplam enerji hesaplandığında

$$E(t) = \int d^3x\sqrt{\tilde{g}}a^3(x^0)\rho(x^0) = Va^3(x^0)\rho(x^0)$$

olarak elde edilir. Buradan enerjinin zamana göre değişimini hesaplarsak:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}[Va^3(x^0)\rho(x^0)]$$

$$\dot{E}(x^0) = Va^3(x^0)[\dot{\rho}(x^0) + 3H(x^0)\rho(x^0)]$$

Enerji-momentum tensörünün kovaryant diverjansından

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + P)$$

zole edilip yukarıdaki türev ifadesinde yerine yazılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa toplam enerjinin zamana göre değişimi

$$\frac{dE}{dt} = -3Va^2(x^0)\dot{a}(x^0)P(x^0)$$

olarak elde edilir. [12]

Yapılan hesaplar enerjinin mutlak korunumu ilkesine bir koşul getirir: *Enerji sadece lokal olarak korunur.*

Global ölçekte evren genişlediği için ölçek faktörü ve türevi pozitiftir. Dolayısıyla evrendeki toplam basıncın sıfırdan farklı olduğu en genel durumda toplam enerji sabit kalamaz. Dahası, kozmolojik gözlemlerle doğrulanan ve şu an içinde bulunduğumuz karanlık enerji hâkimiyetinde evrenin toplam basıncı negatiftir (P < 0). Bu durum, enerjinin zamana göre türevinin pozitif olmasına yol açar.

Uzay-zamanın genişlemesi vakumun negatif basıncına karşı iş yaptığı için evrenin toplam enerjisi korunmak bir yana, hacimle birlikte sürekli olarak artmaktadır.

Öte yandan karanlık enerji (vakum enerjisi) hesaba katılmadığında basınçsız maddenin eş hareketli toplam enerjisi sabit kalırken (P = 0) pozitif basınca sahip radyasyonun enerjisi evren genişledikçe azalmaya mahkûmdur. Fotonların genişleyen bir uzay-zamanda neden ve nasıl enerji kaybettiği problemi, Olbers Paradoksu yazısında daha detaylı anlatılmıştır.

SONUÇ

Emmy Noether'in 1918'de Genel Görelilikteki enerji açmazını çözmek için inşa ettiği varyasyonel çerçeve, kuramsal fiziğin dilini kökten değiştirmiştir. Bu çalışmada izlenen yolun gösterdiği üzere, doğrusal ve açısal momentumdan elektrik yüküne kadar doğanın en temel korunum yasaları dışarıdan dayatılan aksiyomlar değil, eylemin sahip olduğu uzay-zaman ve iç simetrilerin kaçınılmaz geometrik sonuçlarıdır. Teoremin asıl gücü ise yalnızca simetrilerin korunduğu ideal sistemlerde değil, kırıldığı dinamik rejimlerde de ortaya çıkar: Öteleme simetrisini kıran dış kuvvetten dönme simetrisini kıran torka, zamanda öteleme simetrisini ortadan kaldıran genişleyen FLRW metriğine kadar korunumdan her sapma, kırılan simetrinin doğrudan bir ölçüsüdür. Bu açıdan Noether teoremi, enerjinin kozmolojik ölçekte neden global olarak korunmadığını açıklayarak 1915'te başlayan tartışmayı kapatmakla kalmaz; fiziğin yalnızca hesap yapmak değil, evrenin altında yatan simetri ve geometriyi okumak olduğunu da gösterir.

KAYNAKLAR

[1] Noether, E. (1918). Invariante Variationsprobleme. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, 235–257.
[2] Kosmann-Schwarzbach, Y. (2011). The Noether Theorems: Invariance and Conservation Laws in the Twentieth Century. Springer.
[3] Einstein, A. (1935, May 5). The Late Emmy Noether. The New York Times.
[4] Dick, A. (1981). Emmy Noether 1882–1935. Birkhäuser Boston.
[5] Reid, C. (1970). Hilbert. Springer-Verlag
[6] van der Waerden, B. L. (1931). Moderne Algebra. Springer.
[7] Weyl, H. (1935). Emmy Noether. Scripta Mathematica, 3, 201–220.
[8] Bañados, M., & Reyes, I. A. (2016). A short review on Noether's theorems, gauge symmetries and boundary terms. International Journal of Modern Physics D, 25(10), 1630021.
[9] Ryder, L. H. (1985). Quantum Field Theory. Cambridge University Press.
[10] Newton, I. (1687). Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica. Jussu Societatis Regiae ac Typis Josephi Streater.
[11] Goldstein, H., Poole, C., & Safko, J. (2002). Classical Mechanics (3rd ed.). Addison-Wesley.
[12] Aoki, S. (2025). Is energy conserved in general relativity?. Modern Physics Letters A, 40(40), 2550208.

ŞU ANA KADAR Kİ BÜTÜN YAZILAR ARTIK DERGİ WEBSİTESİNDE!

https://yildizquark-lab.github.io/YildizFizikDergisi/index.html